

ТЕМА 12

СЛОЖНОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ

12.1. Основные понятия и определения. Классификация видов сложного сопротивления

В предыдущих темах были изложены методы расчета элементов конструкций и деталей машин, которые испытывали один из простых видов деформации (осевое растяжение и сжатие, плоский поперечный изгиб, сдвиг или кручение). В каждом из этих простых видов деформации в поперечном сечении элемента действовал один внутренний силовой фактор – продольная сила N при осевом растяжении или сжатии, поперечная сила Q - при сдвиге, крутящий момент $M_{кр}$ - при кручении, изгибающий момент M - при чистом изгибе. Исключение составил лишь плоский поперечный изгиб, так как в поперечных сечениях бруса при этом виде деформации имели место поперечная сила Q_y и изгибающий момент M_z . Но, учитывая то, что касательные напряжения при плоском поперечном изгибе имеют обычно второстепенное значение, этот вид изгиба относят также к числу простых видов деформации.

На практике кроме простых видов деформации часто встречаются случаи, когда в результате действия нагрузки в поперечных сечениях бруса одновременно появляются *несколько внутренних сил*, влиянием которых нельзя пренебречь. В этом случае вид деформации, возникающий в брусе, называется *сложным сопротивлением*. К числу таких видов сложного сопротивления можно отнести следующие:

- пространственный и кривой изгиб;
- изгиб с растяжением (сжатием);
- внецентренное растяжение или сжатие;
- изгиб с кручением;
- кручение с растяжением или сжатием.

Возможны и другие виды сложной деформации с более сложной комбинацией внутренних силовых факторов.

Принципиально новая задача сложного сопротивления не вносят, так как совместное действие внутренних факторов приводит к напряженному состоянию, которое можно получить суммированием напряженных состояний, вызванным каждым видом простого нагружения в отдельности.

Принцип суперпозиции (суммирования действия сил) широко применяется в сопротивлении материалов, когда деформации малы и подчиняются закону Гука. Тем не менее, здесь не все так просто. Если пренебречь влиянием поперечных сил, то принцип простого суммирования действия сил может быть применен к таким из перечисленных выше видам сложного сопротивления, как пространственный изгиб, кривой изгиб и изгиб с растяжением. К этим же видам сложного сопротивления можно отнести и внецентренное растяжение и сжатие. В то же время принцип суммирования действия сил неприменим к таким видам сложного сопротивления, как изгиб с

кручением, кручение с растяжением или сжатием и вообще ко всем видам сложного сопротивления, при которых возникает сложное напряженное состояние. В связи с этим все виды сложного сопротивления следует разделить на те виды, при которых возникает линейное напряженное состояние, и, следовательно, применим принцип простого суммирования напряжений при составлении условий прочности, и те виды, при которых возникает сложное напряженное состояние, и при составлении условий прочности принцип простого суммирования напряжений неприменим, а для оценки прочности используют теории прочности.

Таким образом, все виды сложного сопротивления условно можно разделить на две группы:

- виды сложного сопротивления, при которых возникает линейное напряженное состояние;
- виды сложного сопротивления, при которых возникает сложное напряженное состояние.

К первой группе видов сложного сопротивления могут быть отнесены, как уже отмечалось выше, пространственный и плоский кривой изгиб, изгиб с растяжением, внецентренное растяжение или сжатие. Ко второй группе – изгиб с кручением, кручение с растяжением или сжатием, общий случай сложного сопротивления. У каждой из этих групп имеются свои подходы и своя методика расчета. Рассмотрим методики расчета элементов конструкций, испытывающих сложное сопротивление, относящиеся к разным группам по типу напряженного состояния.

12.2. Методика расчета на прочность при сложном сопротивлении первой группы

Рассмотрим фрагмент стержня, испытывающего действие внешних нагрузок, при которых в поперечном сечении возникают пять внутренних силовых факторов, исключая крутящий момент: N, Q_y, Q_z, M_y, M_z . Влиянием поперечных сил Q_y, Q_z будем пренебрегать. Тогда в поперечном сечении стержня останутся действовать только три внутренних силовых фактора N, M_y, M_z (Рис.12.1).

Каждый из приведенных внутренних силовых факторов является интегральной суммой нормальных напряжений, возникающих в продольных волокнах стержня. Напряженное состояние, которое при этом возникнет, будет линейным. Следовательно, для определения расчетного напряжения можно использовать принцип простого суммирования нормальных напряжений.

Выберем произвольным образом точку К и вычислим в этой точке нормальные напряжения, пользуясь принципом суперпозиции:

$$\sigma = \sigma_N + \sigma_{M_z} + \sigma_{M_y}, \quad (12.1)$$

где: $\sigma_N = \frac{N}{A}$; $\sigma_{M_z} = \frac{M_z}{J_z} y$; $\sigma_{M_y} = \frac{M_y}{J_y} z$.

Подставляя значения напряжений в формулу (12.1), получим:

$$\sigma = \pm \frac{N}{A} \pm \frac{M_z}{J_z} y \pm \frac{M_y}{J_y} z. \quad (12.2)$$

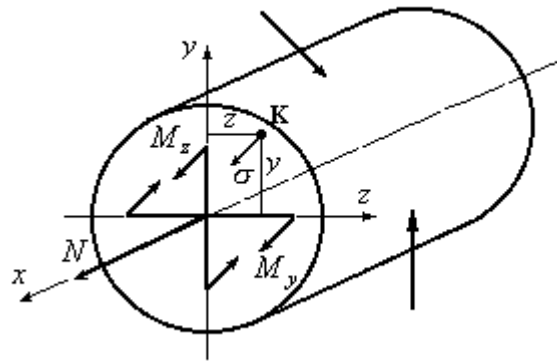


Рис.12.1

Знак перед каждым из слагаемых в формуле (12.2) выбираем такой, какой бы имело нормальное напряжение для каждого из соответствующих простых видов деформации, т.е. из физических соображений. В качестве примера покажем знаки, которые бы имело нормальное напряжение в каждой из четвертей координат для случая, приведенного на рис.12.1 от каждого из простых видов деформации (Рис.12.2).

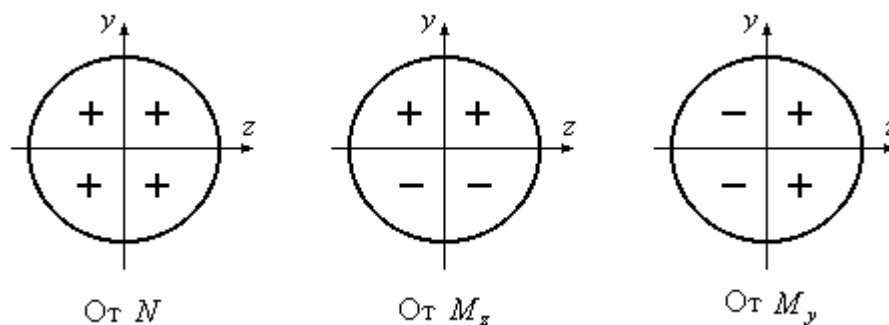


Рис.12.2

Таким образом, нормальные напряжения в точке К будут иметь такие знаки:

$$\sigma_K = + \frac{N}{A} + \frac{M_z}{J_z} y_K + \frac{M_y}{J_y} z_K.$$

При определении максимальных напряжений нужно знать координаты точек, в которых эти напряжения возникают. Из формулы (12.2) следует, что наибольшие нормальные напряжения возникают в наиболее удаленных точках сечения от так называемой *нулевой линии сечения*. Нулевой линией будем называть геометрическое место точек, нормальное напряжение в которых равно нулю. При плоском поперечном изгибе положение нулевой (нейтральной) линии известно – эта линия проходит через центр тяжести сечения. Так ли это в общем случае сложного сопротивления? Чтобы это выяснить, вычислим в любой из точек нулевой линии нормальные напряжения, воспользовавшись формулой (12.2). В качестве координат произвольной точки нулевой линии возьмем координаты y_0 и z_0 . Напряжения в такой точке будут равны:

$$\sigma_0 = \pm \frac{N}{A} \pm \frac{M_z}{J_z} y_0 \pm \frac{M_y}{J_y} z_0 = 0. \quad (12.3)$$

Уравнение (12.3) представляет собой уравнение нулевой линии. Знаки перед каждым из слагаемых выбираются такими, как если бы его (знак) имело нормальное напряжение σ для точки поперечного сечения, принадлежащей первому квадранту. В нашем случае (Рис.12.1) уравнение (12.3) принимает вид:

$$\frac{N}{A} + \frac{M_z}{J_z} y_0 + \frac{M_y}{J_y} z_0 = 0. \quad (12.4)$$

Анализируя уравнение (12.4), можно сделать вывод, что нулевая линия является прямой линией, так как координаты ее точек y_0 и z_0 входят в это уравнение в первой степени. Нулевая линия не проходит через центр тяжести сечения, так как при $y_0 = 0$ координата $z_0 \neq 0$. В дальнейшем при изучении отдельных видов сложного сопротивления мы отметим и некоторые другие особенности поведения нулевой линии.

Составим теперь уравнение прочности для общего случая сложного сопротивления (для первой группы). Максимальные напряжения будут возникать в точках, наиболее удаленных от нулевой линии. Обозначим координаты одной из таких точек y_{\max} и z_{\max} . Тогда условие прочности будет иметь вид:

$$\sigma_{\max} = \left| \pm \frac{N}{A} \pm \frac{M_z}{J_z} y_{\max} \pm \frac{M_y}{J_y} z_{\max} \right| \leq [\sigma]. \quad (12.5)$$

В частном случае, если поперечное сечение имеет вид прямоугольника, опасными точками будут угловые точки сечения. В этом случае условие прочности имеет вид:

$$\sigma_{\max} = \left| \pm \frac{N}{A} \pm \frac{M_z}{W_z} \pm \frac{M_y}{W_y} \right| \leq [\sigma]. \quad (12.6)$$

На рис.12.3 показан один из вариантов распределения нормальных напряжений в общем случае (в рамках первой группы) сложного сопротивления для сечения прямоугольной формы.

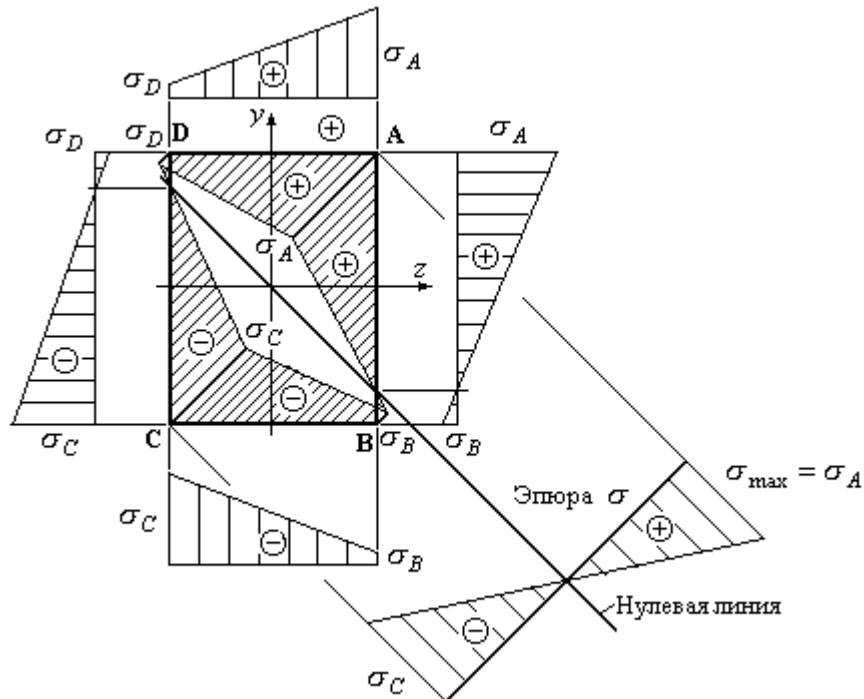


Рис.12.3

Сформулируем порядок расчета на прочность при сложном сопротивлении:

1. Раскладываем произвольную пространственную систему сил на составляющие, действующие в главных плоскостях инерции бруса.
2. Строим эпюры внутренних усилий в главных плоскостях инерции.
3. Определяем положение опасных сечений – тех сечений, в которых внутренние усилия одновременно велики.
4. Составляем уравнение нулевой линии (12.4) и строим ее для всех опасных сечений.
5. Определяем координаты опасных точек (наиболее удаленных от нулевой линии) для всех опасных сечений.
6. Вычисляем напряжения в опасных точках и проверяем прочность бруса по формуле (12.5).

Для частного случая, когда сечение имеет две оси симметрии и вписывается в прямоугольник так, что все вершины прямоугольника принадлежат сечению, опасная точка всегда лежит в одной из вершин и условие прочности приобретает вид (12.6). В этом случае можно не выполнять пункты №4 и №5.

Рассмотрим подробнее каждый из видов сложного напряжения первой группы.

12.3. Пространственный (сложный) изгиб

Пространственным изгибом называется такой вид сложного сопротивления, при котором в поперечном сечении бруса действуют только изгибающие моменты M_y и M_z . Полный изгибающий момент при этом действует ни в одной из главных плоскостей инерции. Продольная сила отсутствует. Пространственный или сложный изгиб часто называют *неплоским изгибом*, так как изогнутая ось стержня не является плоской кривой. Такой изгиб вызывается силами, действующими в разных плоскостях перпендикулярно оси балки (Рис.12.4).

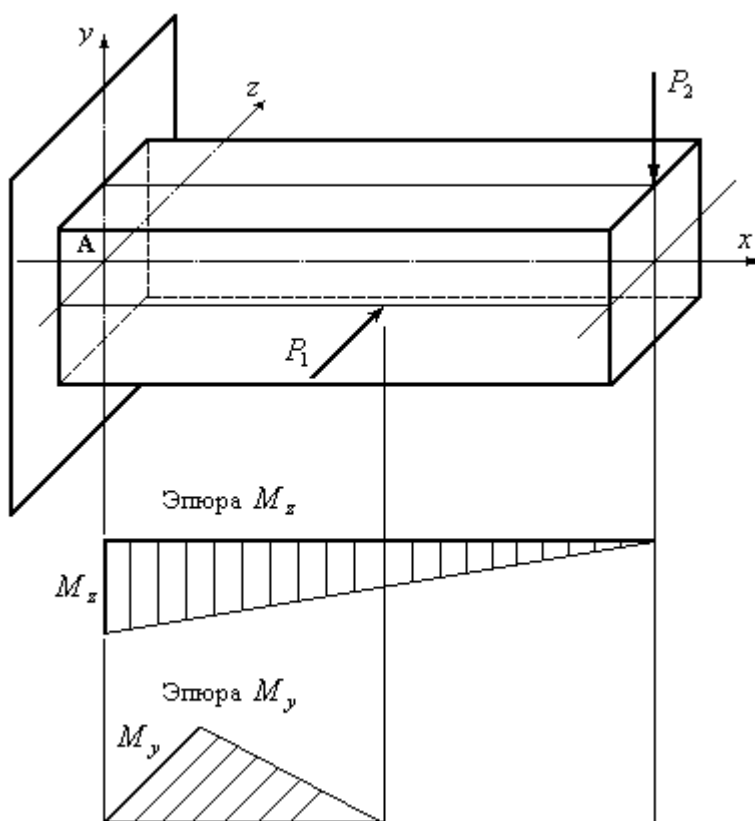


Рис.12.4

Следуя порядку решения задач при сложном сопротивлении, изложенному выше, раскладываем пространственную систему сил, представленную на рис. 12.4, на две такие, чтобы каждая из них действовала в одной из главных плоскостей. В результате получаем два плоских поперечных изгиба – в вертикальной и горизонтальной плоскости. Из четырех внутренних силовых факторов, которые при этом возникают в поперечном сечении балки

Q_y, Q_z, M_y, M_z , будем учитывать влияние только изгибающих моментов M_y, M_z . Строим эпюры M_y, M_z , вызванных соответственно силами P_1, P_2 (Рис.12.4).

Анализируя эпюры изгибающих моментов, приходим к выводу, что опасным является сечение А, так как именно в этом сечении возникают наибольшие по величине изгибающие моменты M_z и M_y . Теперь необходимо установить опасные точки сечения А. Для этого построим нулевую линию. Уравнение нулевой линии с учетом правила знаков для членов, входящих в это уравнение, имеет вид:

$$\frac{M_z}{J_z} y_0 - \frac{M_y}{J_y} z_0 = 0. \quad (12.7)$$

Здесь принят знак “-” возле второго члена уравнения, так как напряжения в первой четверти, вызванные моментом M_y , будут отрицательными.

Определим угол наклона нулевой линии β с положительным направлением оси z (Рис.12.6):

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{y_0}{z_0} = \frac{J_z}{J_y} \cdot \frac{M_y}{M_z}. \quad (12.8)$$

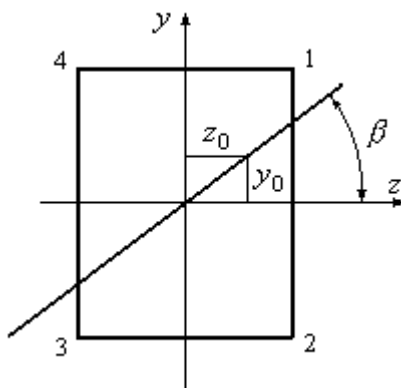


Рис.12.5

Из уравнения (12.7) следует, что нулевая линия при пространственном изгибе является прямой линией и проходит через центр тяжести сечения.

Из рис.12.5 видно, что наибольшие напряжения возникнут в наиболее удаленных от нулевой линии точках сечения №2 и №4. По величине нормальные напряжения в этих точках будут одинаковыми, но по знаку отличаются: в точке №4 напряжения будут положительными, т.е. растягивающими, в точке №2 – отрицательными, т.е. сжимающими. Знаки этих напряжений были установлены из физических соображений.

Теперь, когда опасные точки установлены, вычислим максимальные напряжения в сечении А и проверим прочность балки с помощью выражения:

$$\sigma_4 = \sigma_{\max} = \frac{|M_z|}{W_z} + \frac{|M_y|}{W_y} \leq [\sigma]. \quad (12.9)$$

Условие прочности (12.9) позволяет не только выполнить проверку прочности балки, но и подобрать размеры ее поперечного сечения, если задано соотношение сторон поперечного сечения.

12.4. Косой изгиб

Косым называется такой вид сложного сопротивления, при котором в поперечных сечениях балки возникают только изгибающие моменты M_z и M_y , но в отличие от пространственного изгиба все силы, приложенные к балке, действуют в одной (силовой) плоскости, не совпадающей ни с одной из главных плоскостей инерции. Этот вид изгиба наиболее часто встречается в практике, поэтому исследуем его подробнее.

Рассмотрим консольную балку, нагруженную силой P , как показано на рис 12.6, и выполненную из изотропного материала.

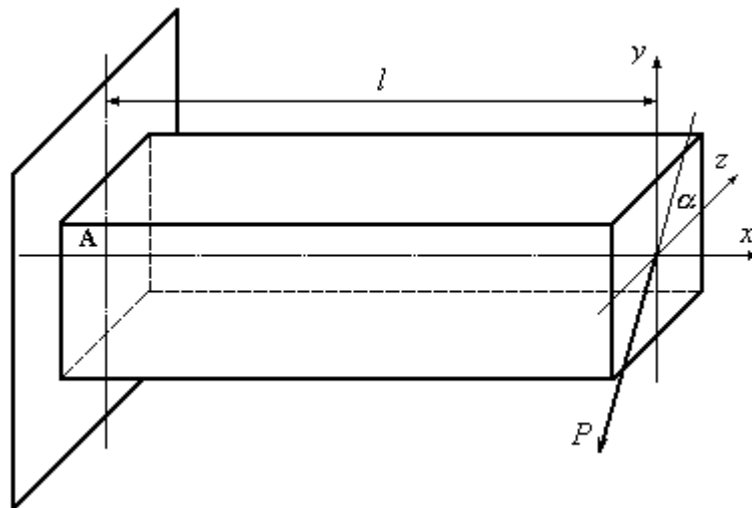


Рис.12.6

Так же, как и при пространственном изгибе, при косом изгибе отсутствует продольная сила. Влиянием поперечных сил при расчете балки на прочность будем пренебрегать.

Расчетная схема балки, изображенной на рис.12.6, приведена на рис.12.7.

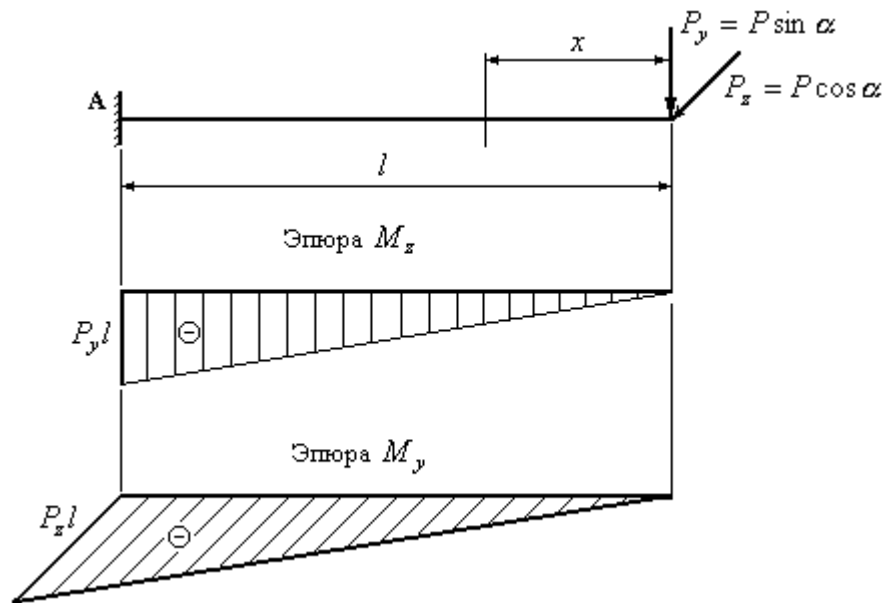


Рис.12.7

Разложим силу P на вертикальную P_y и горизонтальную P_x составляющие и от каждой из этих составляющих построим эпюры изгибающих моментов M_z и M_y .

Вычислим составляющие полного изгибающего момента в сечении x :

$$M_z = P \sin \alpha \cdot x; \quad M_y = P \cos \alpha \cdot x.$$

Полный изгибающий момент в сечении x равен

$$M(x) = M = \sqrt{M_z^2 + M_y^2} = P \cdot x.$$

Таким образом, составляющие полного изгибающего момента можно выразить через полный момент следующим образом:

$$M_z = M \sin \alpha; \quad M_y = M \cos \alpha. \quad (12.10)$$

Из выражения (12.10) видно, что при косом изгибе нет необходимости раскладывать систему внешних сил на составляющие, так как эти составляющие полного изгибающего момента связаны друг с другом с помощью угла наклона следа силовой плоскости α . В результате отпадает необходимость в построении эпюр составляющих M_z и M_y полного изгибающего момента. Достаточно построить эпюру полного изгибающего момента M в силовой плоскости, а затем, воспользовавшись выражением (12.10), определить составляющие полного изгибающего момента в любом интересующем нас сечении балки. Полученный вывод существенно упрощает решение задач при косом изгибе.

Подставим значения составляющих полного изгибающего момента (12.10) в формулу для нормальных напряжений (12.2) при $N = 0$. Получим:

$$\sigma = -M \left(\frac{\sin \alpha}{J_z} y + \frac{\cos \alpha}{J_y} z \right). \quad (12.11)$$

Здесь знак “-” возле полного изгибающего момента проставлен специально с той целью, чтобы автоматически получать правильный знак нормального напряжения в рассматриваемой точке поперечного сечения. Полный изгибающий момент M и координаты точки y и z берутся со своими знаками при условии, что в первом квадранте знаки координат точки принимаются положительными.

Формула (12.11) была получена из рассмотрения частного случая косоугольного изгиба балки, заземленной одним концом и нагруженной на другом сосредоточенной силой. Тем не менее, эта формула является общей формулой для вычисления напряжений при косом изгибе.

Опасным сечением, как и при пространственном изгибе в рассматриваемом случае (Рис.12.6), будет сечение А, так как в этом сечении возникает наибольший по величине полный изгибающий момент. Опасные точки сечения А определим, построив нулевую линию. Уравнение нулевой линии получим, вычислив с помощью формулы (12.11) нормальные напряжения в точке с координатами y_0 и z_0 , принадлежащей нулевой линии и приравняв найденные напряжения нулю. После несложных преобразований получим:

$$y_0 = -\frac{J_z}{J_y} \operatorname{ctg} \alpha \cdot z_0 \quad (12.12)$$

или

$$\operatorname{tg} \beta = -\frac{J_z}{J_y} \operatorname{ctg} \alpha. \quad (12.13)$$

Здесь β - угол наклона нулевой линии к оси z (Рис.12.8).

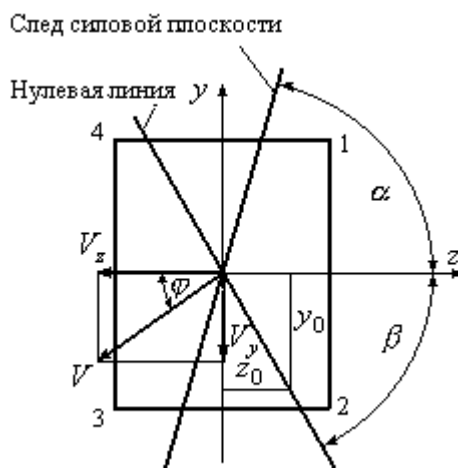


Рис.12.8

Исследуя уравнения (12.12) и (12.13), можно сделать некоторые выводы о поведении нулевой линии при косом изгибе:

1. Нулевая линия является прямой линией.
2. Нулевая линия проходит через центр тяжести поперечного сечения.
3. Нулевая линия пересекает те четверти координат, которые не пересекает след силовой плоскости.
4. Нулевая линия в общем случае не перпендикулярна следу силовой плоскости. В частном случае при равенстве моментов инерции J_z и J_y (круг, квадрат) $\operatorname{tg}\beta = -\operatorname{ctg}\alpha$, $\alpha + \beta = 90^\circ$, угол β является дополнением к углу α . При этом $\alpha \neq \beta$. Из этого можно сделать вывод, что для сечений, у которых моменты инерции относительно двух любых взаимно перпендикулярных осей равны ($J_z = J_y$), косой изгиб не возникает.
5. Если $J_z > J_y$, то угол $\alpha + \beta$ раскрывается больше, чем прямой, нейтральная линия отклоняется к той оси, относительно которой момент инерции минимален.

Из рис.12.8 следует, что наибольшие по величине напряжения возникают в точках сечения, наиболее удаленных от нулевой линии. В рассматриваемом случае такими точками являются точки №1 и №3. Таким образом, при косом изгибе условие прочности имеет вид:

$$\sigma_{\max} = |M_{\max}| \cdot \left(\frac{\sin \alpha}{J_z} y_{\max} + \frac{\cos \alpha}{J_y} z_{\max} \right) \leq [\sigma]. \quad (12.14)$$

Здесь: $y_{\max} = y_1$; $z_{\max} = z_1$.

Если моменты сопротивления сечения относительно главных осей инерции могут быть выражены через размеры сечения, условие прочности удобно использовать в таком виде:

$$\sigma_{\max} = |M_{\max}| \cdot \left(\frac{\sin \alpha}{W_z} + \frac{|\cos \alpha|}{W_y} \right) \leq [\sigma]. \quad (12.15)$$

При подборе сечений один из осевых моментов сопротивления выносят за скобку и задаются отношением $\frac{W_z}{W_y}$. Зная $[\sigma]$, M_{\max} и угол α , путем последовательных попыток определяют значения W_z и W_y , удовлетворяющие условию прочности

$$\sigma_{\max} = \left| \frac{M_{\max}}{W_z} \right| \cdot \left(\sin \alpha + \frac{W_z}{W_y} |\cos \alpha| \right) \leq [\sigma]. \quad (12.16)$$

Для несимметричных сечений, не имеющих выступающих углов, используется условие прочности в виде (12.14). В этом случае при каждой новой попытке подбора сечения необходимо предварительно вновь найти положение нулевой линии и координаты наиболее удаленной точки (y_{\max}, z_{\max}).

Для прямоугольного сечения $\frac{W_z}{W_y} = \frac{h}{b}$. Задаваясь отношением $\frac{h}{b}$, из условия прочности (12.16) легко можно найти величину W_z и размеры поперечного сечения.

Рассмотрим определение перемещений при косом изгибе. Найдем прогиб в сечении x консольной балки (Рис.12.9). Для этого изобразим балку в единичном состоянии и построим эпюру единичных изгибающих моментов в одной из главных плоскостей. Будем определять полный прогиб в сечении x , предварительно определив проекции вектора перемещений V на оси y и z . Проекцию вектора полного прогиба на ось y найдем, воспользовавшись формулой Мора:

$$V_y = \int_l \frac{\bar{M}_1 M_z}{EJ_z} dx = \int_l \frac{\bar{M}_1 M \sin \alpha}{EJ_z} dx = \frac{\sin \alpha}{EJ_z} \int_l \bar{M}_1 M dx. \quad (12.17)$$

Проекцию вектора полного прогиба на ось z найдем аналогичным способом:

$$V_z = \int_l \frac{\bar{M}_1 M_y}{EJ_y} dx = \int_l \frac{\bar{M}_1 M \cos \alpha}{EJ_y} dx = \frac{\cos \alpha}{EJ_y} \int_l \bar{M}_1 M dx. \quad (12.18)$$

Полный прогиб определим по формуле:

$$V = \sqrt{V_y^2 + V_z^2}. \quad (12.19)$$

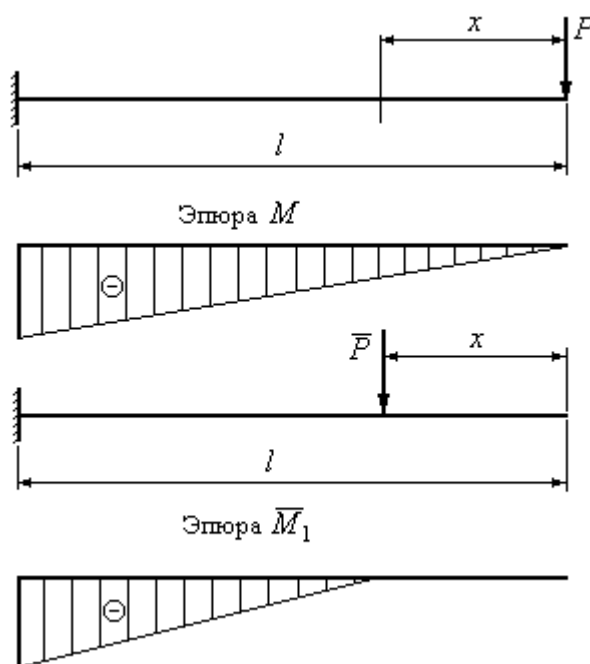


Рис.12.9

Следует обратить внимание, что при косом изгибе в формулах (12.17) и (12.18) при определении проекций прогиба на оси координат меняются лишь постоянные члены, стоящие перед знаком интеграла. Сам же интеграл остается постоянным. При решении практических задач будем вычислять этот интеграл, пользуясь методом Мора-Симпсона. Для этого умножим единичную эпюру \bar{M}_1 на грузовую M (Рис.12.9), построенную в силовой плоскости, а затем полученный результат умножим последовательно на постоянные коэффициенты, соответственно, $\frac{\sin \alpha}{EJ_z}$ и $\frac{\cos \alpha}{EJ_y}$. В результате получим проекции полного прогиба V_y и V_z на оси координат y и z . Выражения для проекций прогиба для общего случая нагружения, когда балка имеет n участков, будут иметь вид:

$$V_y = \sum_{j=1}^n \frac{\sin \alpha}{6EJ_z} [l_j (Aa + 4Cc + Bb)_j]; \quad (12.20)$$

$$V_z = \sum_{j=1}^n \frac{\cos \alpha}{6EJ_y} [l_j (Aa + 4Cc + Bb)_j]. \quad (12.21)$$

Отложим найденные значения для V_y , V_z и V (Рис.12.8). Вектор полного прогиба V составляет с осью z острый угол φ , величин которого можно найти по формуле:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{V_y}{V_z} = \frac{J_y}{J_z} \operatorname{tg} \alpha, \quad (12.22)$$

откуда

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{J_y}{J_z} \operatorname{tg} \alpha. \quad (12.23)$$

Сравнивая уравнение (12.22) с уравнением нулевой линии (12.13), приходим к выводу, что

$$\operatorname{tg} \varphi = -\frac{1}{\operatorname{tg} \beta} \quad \text{или} \quad \operatorname{tg} \varphi \cdot \operatorname{tg} \beta = -1,$$

откуда следует, что нулевая линия и вектор полного прогиба V взаимно перепедикулярны. Угол φ является дополнением угла β до 90° . Это условие может быть использовано для проверки при решении задач на косоугольный изгиб:

$$|\varphi| + |\beta| = 90^\circ. \quad (12.24)$$

Таким образом, направление прогибов при косом изгибе перпендикулярно нулевой линии. Отсюда вытекает важное условие, что *направление прогибов не совпадает с направлением действующей силы* (Рис.12.8). Если нагрузка представляет собой плоскую систему сил, то ось изогнутой балки лежит в плоскости, которая не совпадает с плоскостью действия сил. Балка перекашивается по отношению к силовой плоскости. Это обстоятельство послужило основанием для того, что подобный изгиб стали называть *косым*.

Пример 12.1. Определить положение нулевой линии (найти угол β) для поперечного сечения балки, изображенной на рис.12.10.

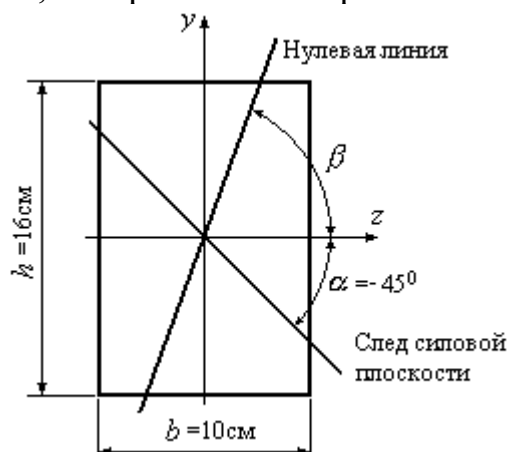


Рис.12.10

Решение:

1. Угол до следа силовой плоскости α будем откладывать от положительного направления оси z . Угол α всегда будем брать острым, но с учетом знака. Любой угол считается положительным, если в правой системе координат его откладывают от положительного направления оси z против часовой стрелки, и отрицательным, если угол откладывают по часовой стрелке. В данном случае угол α считается отрицательным ($\alpha = -45^\circ$).

2. Определяем отношение осевых моментов инерции:

$$\frac{J_z}{J_y} = \frac{\frac{bh^3}{12}}{\frac{hb^3}{12}} = \frac{h^2}{b^2} = \frac{16^2}{10^2} = 2,56.$$

3. Записываем уравнение нулевой линии при косом изгибе в виде, откуда находим угол β :

$$\operatorname{tg} \beta = - \frac{J_z}{J_y} \operatorname{ctg} \alpha = - 2,56 \cdot \operatorname{ctg}(-45^\circ) = 2,56; \quad \beta = \operatorname{arctg} 2,56 = 68,66^\circ.$$

4. Угол β оказался положительным, поэтому откладываем его от положительного направления оси z против часовой стрелки до нулевой линии (Рис.12.10).

Пример 12.2. Определить величину нормального напряжения в точке А поперечного сечения балки при косом изгибе, если изгибающий момент $M = 15$ кНм, координаты точки $y_A = 5$ см, $z_A = -2$ см. Размеры поперечного сечения балки и угол наклона силовой плоскости α приведены на Рис.12.11.

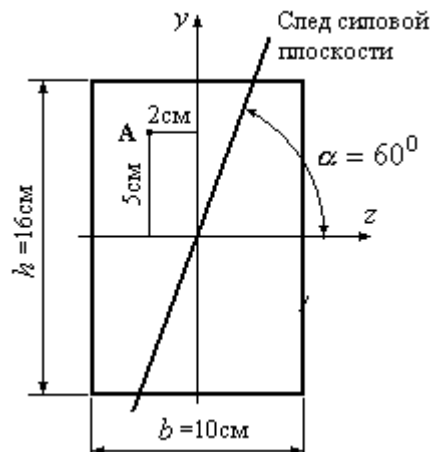


Рис.12.11

Решение:

1. Вычислим предварительно моменты инерции сечения относительно осей z и y :

$$J_z = \frac{bh^3}{12} = \frac{10 \cdot 16^3}{12} = 3413,33 \text{ см}^4; \quad J_y = \frac{hb^3}{12} = \frac{16 \cdot 10^3}{12} = 1333,33 \text{ см}^4.$$

2. Запишем формулу (12.11) для определения нормальных напряжений в произвольной точке поперечного сечения при косом изгибе. При подстановке значения изгибающего момента в формулу (12.11) следует учесть, что изгибающий момент по условию задачи положительный.

$$\sigma_A = -M \left(\frac{\sin \alpha}{J_z} y_A + \frac{\cos \alpha}{J_y} z_A \right) = -15 \cdot 10^3 \left(\frac{\sin 60^\circ}{3413,33 \cdot 10^{-8}} 5,0 \cdot 10^{-2} + \frac{\cos 60^\circ}{1333,33 \cdot 10^{-8}} (-2,0) \cdot 10^{-2} \right) \times 10^{-6} = -7,78 \text{ МПа}.$$

Пример 12.3. Определить размеры поперечного сечения балки, изображенной на рис.12.12а. Материал балки – сталь с допускаемым

напряжением $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$. Отношение сторон задается $\frac{b}{h} = \frac{1}{2}$. Нагрузки и угол наклона силовой плоскости α приведены на рис.12.12в.

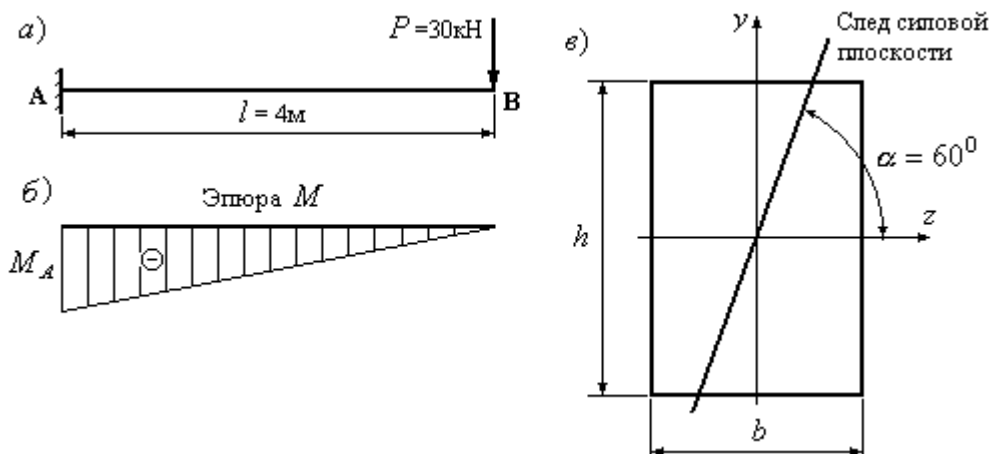


Рис.12.12

Решение:

1. Для определения положения опасного сечения строим эпюру изгибающих моментов (Рис.12.12б). Опасным является сечение А. Максимальный изгибающий момент в опасном сечении $|M_A| = Pl = 30 \cdot 4 = 120 \text{ кНм}$.

2. Опасной точкой а сечении А будет одна из угловых точек. Условие прочности запишем в виде

$$\sigma_{\max} = \left| \frac{M_{\max}}{W_z} \right| \cdot \left(\sin \alpha + \frac{W_z}{W_y} |\cos \alpha| \right) \leq [\sigma],$$

Откуда найдем, учитывая, что отношение $\frac{W_z}{W_y} = \frac{h}{b} = 2$:

$$W_z = \frac{|M_A|}{[\sigma]} \left(\sin \alpha + \frac{W_z}{W_y} |\cos \alpha| \right) = \frac{120 \cdot 10^3}{160 \cdot 10^6} (\sin 60^\circ + 2 \cos 60^\circ) = 1399,5 \text{ см}^3.$$

3. Определяем размеры поперечного сечения. Осевой момент сопротивления W_z с учетом отношения сторон $\frac{b}{h} = \frac{1}{2}$ равен:

$$W_z = \frac{\frac{1}{2} h \cdot h^2}{6} = \frac{h^3}{12} = 1399,5 \text{ см}^3, \quad \text{откуда}$$

$$h = \sqrt[3]{12 \cdot 1399,5} = 25,61 \text{ см}; \quad b = \frac{1}{2}h = \frac{1}{2}25,61 = 12,8 \text{ см.}$$

Пример 12.4. В результате изгиба балки центр тяжести сечения переместился в направлении, определяемом углом φ с осью z (Рис.12.13,а). Определить угол наклона α силовой плоскости. Форма и размеры поперечного сечения балки приведены на рисунке.

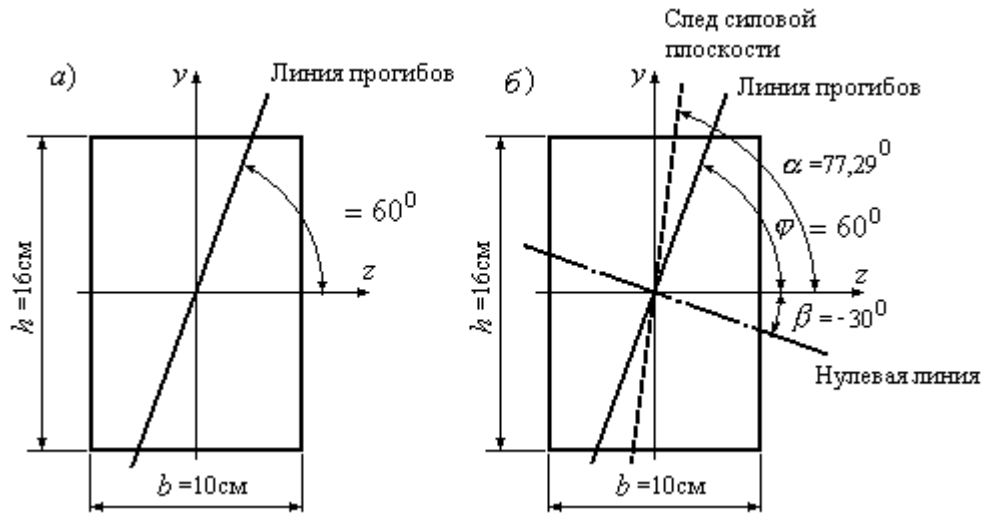


Рис.12.13

Решение:

1. Для определения угла наклона следа силовой плоскости α воспользуемся выражением (12.22):

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{J_y}{J_z} \operatorname{tg} \alpha, \quad \text{откуда} \quad \alpha = \operatorname{arctg} \left(\frac{J_z}{J_y} \operatorname{tg} \varphi \right).$$

Отношение моментов инерции $\frac{J_z}{J_y} = 2,56$ (см. пример 12.1). Тогда

$$\alpha = \operatorname{arctg} \left(\frac{J_z}{J_y} \operatorname{tg} \varphi \right) = \operatorname{arctg} (2,56 \cdot \operatorname{tg} 60^\circ) = 77,29^\circ.$$

Отложим это значение угла α от положительного направления оси z (Рис.12.13,б). След силовой плоскости на рис 12.13,б показан штриховой линией.

2. Выполним проверку полученного решения. Для этого при найденном значении угла α определим положение нулевой линии. Воспользуемся выражением (12.13):

$$\operatorname{tg} \beta = - \frac{J_z}{J_y} \operatorname{ctg} \alpha = - 2,26 \cdot \operatorname{ctg} 77,29^\circ.$$

Откуда

$$\beta = \arctg\left(-\frac{J_z}{J_y} \operatorname{ctg}\alpha\right) = \arctg(-2,56 \operatorname{ctg}77,29^\circ) = -30^\circ.$$

Нулевая линия показана на рис.12.13 штрих-пунктирной линией. Нулевая линия должна быть перпендикулярной линии прогибов. Проверим это:

$$|\varphi| + |\beta| = 60^\circ + 30^\circ = 90^\circ.$$

Пример 12.5. Определить полный прогиб балки в сечении В при косом изгибе (Рис.12.14а). Материал балки – сталь с модулем упругости $E = 2,0 \cdot 10^5$ МПа. Размеры поперечного сечения и угол наклона силовой плоскости α приведены на рис.12.14б.

Решение:

1. Определим проекции вектора полного прогиба V в сечении А V_y и V_z . Для этого построим грузовую эпюру изгибающих моментов M_p (Рис.12.14,в), единичную эпюру \bar{M}_1 (Рис.12.14,г).

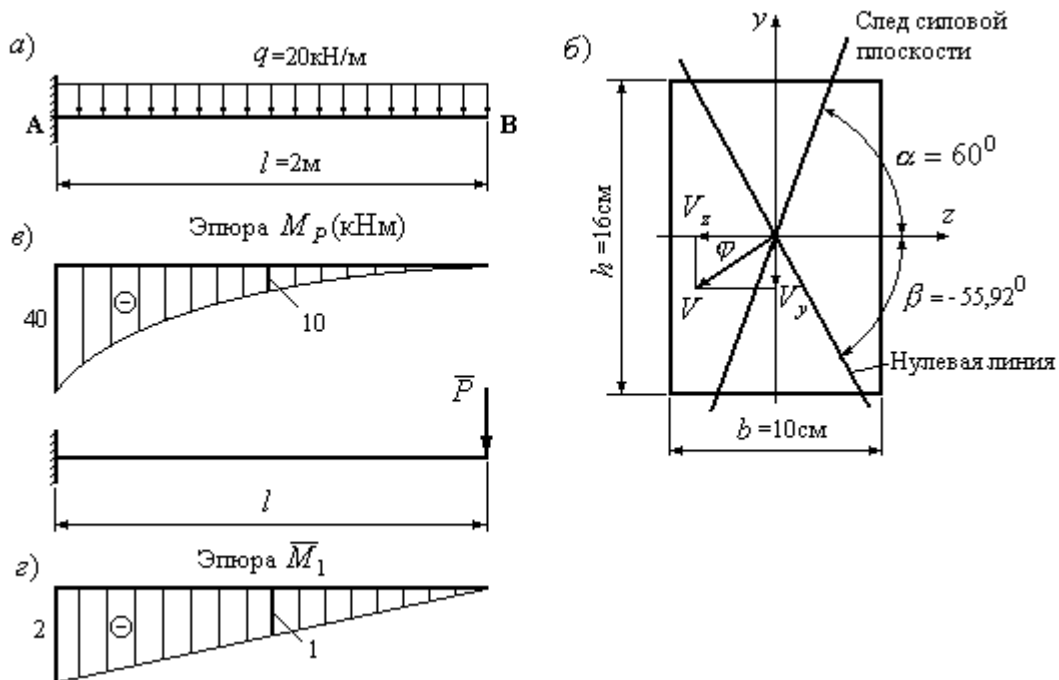


Рис.12.14

2. Применяя метод Мора-Симпсона, перемножим грузовую M_p и единичную \bar{M}_1 эпюры изгибающих моментов, используя выражения (12.20) и (12.21):

$$V_y = \sum_{j=1}^n \frac{\sin \alpha}{6EJ_z} [l_j (Aa + 4Cc + Bb)]_j = \frac{\sin 60^\circ \cdot 10^3}{6 \cdot 2,0 \cdot 10^{11} \cdot 3413,33 \cdot 10^{-8}} \{2,0[(-40)(-2) + 4(-10)(-1)]\} =$$

$$= 5,074 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 5,074 \text{ мм.}$$

$$V_z = \sum_{j=1}^n \frac{\cos \alpha}{6EJ_y} [l_j (Aa + 4Cc + Bb)]_j = \frac{\cos 60^\circ \cdot 10^3}{6 \cdot 2,0 \cdot 10^{11} \cdot 1333,33 \cdot 10^{-8}} \{2,0[(-40)(-2) + 4(-10)(-1)]\} =$$

$$= 7,5 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 7,5 \text{ мм.}$$

Осевые моменты инерции сечения $J_z = 3413,33 \text{ см}^4$ и $J_y = 1333,33 \text{ см}^4$ берем из примера 12.1.

3. Определяем полный прогиб сечения В:

$$V = \sqrt{V_y^2 + V_z^2} = \sqrt{5,074^2 + 7,5^2} = 9,055 \text{ мм.}$$

4. Направление прогиба найдем из выражения

$$\varphi = \arctg \frac{V_y}{V_z} = \arctg \frac{5,074}{7,5} = 34,08^\circ.$$

Найденные значения проекций полного прогиба и сам полный прогиб откладываем на чертеже (Рис.12.14б). Так как проекции полного прогиба получились при решении задачи положительными, откладываем их в направлении действия единичной силы, т.е. вниз (V_y) и влево (V_z).

5. Для проверки правильности решения определим угол наклона нулевой линии к оси z :

$$\beta = \arctg \left(- \frac{J_z}{J_y} \text{ctg} \alpha \right) = \arctg (-2,56 \text{ctg} 60^\circ) = -55,92^\circ.$$

Сложим модули углов направления полного прогиба φ и β :

$$|\varphi| + |\beta| = 34,08^\circ + 55,92^\circ = 90^\circ.$$

Это означает, что полный прогиб перпендикулярен нулевой линии. Таким образом, задача решена верно.

12.5. Изгиб с растяжением (сжатием)

Изгиб с растяжением (сжатием) относится к видам сложного сопротивления первой группы. При этом виде сложного сопротивления могут возникнуть пять внутренних силовых факторов: продольная сила N , поперечные силы Q_y и Q_z и изгибающие моменты M_y и M_z . Если пренебречь влиянием касательных напряжений на прочность бруса, из пяти внутренних силовых факторов остаются три N, M_y, M_z . Этот случай сложного сопротивления был подробно рассмотрен в разделе 12.2 настоящего пособия.

Поэтому все формулы для нормальных напряжений и условия прочности, полученные в разделе 12.2, могут быть применены и к рассматриваемому виду сложного сопротивления. Следует отметить, что при возникновении сложного изгиба со сжатием, брус должен обладать большой жесткостью, т.е. не терять устойчивость.

Рассмотрим частный случай действия нагрузки, при котором возникает изгиб с растяжением. Балка консольного типа (Рис.12.15,а) с прямоугольным поперечным сечением. Балка нагружена наклонной силой P , лежащей в вертикальной плоскости. Разложим силу P на две составляющие: горизонтальную составляющую $P_x = P \cos \alpha$ и вертикальную составляющую $P_y = P \sin \alpha$. От вертикальной составляющей силы P возникает изгибающий момент M_z (Рис.12.15,б), от горизонтальной составляющей силы P - продольная сила N (Рис.12.15,в). Изгибающий момент $M_y = 0$. Изгибающий момент M_z меняется по линейному закону, достигая максимального значения в заделке, в сечении А, продольная сила положительная и постоянная по величине на всей длине балки.

Нормальные напряжения в произвольно выбранной точке сечения для рассматриваемого частного случая определим по формуле (12.2) при $M_y = 0$:

$$\sigma = \frac{N}{A} \pm \frac{M_z}{J_z} y. \quad (12.25)$$

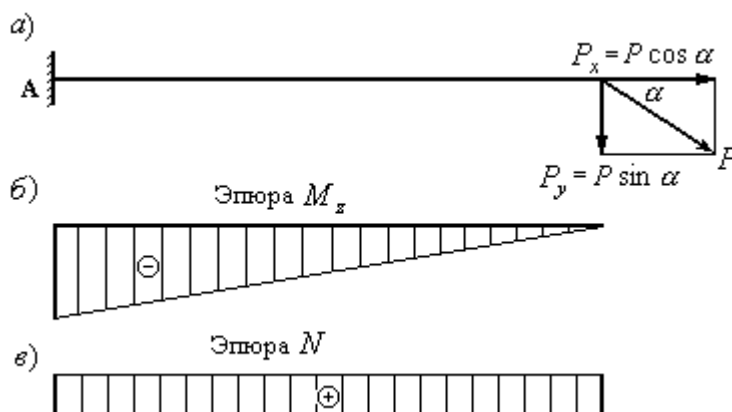


Рис.12.15

При определении напряжений по формуле (12.25) применяем принцип простого суммирования напряжений от действия каждого из факторов в отдельности. На рис.12.16 приведен графический пример сложения напряжений.

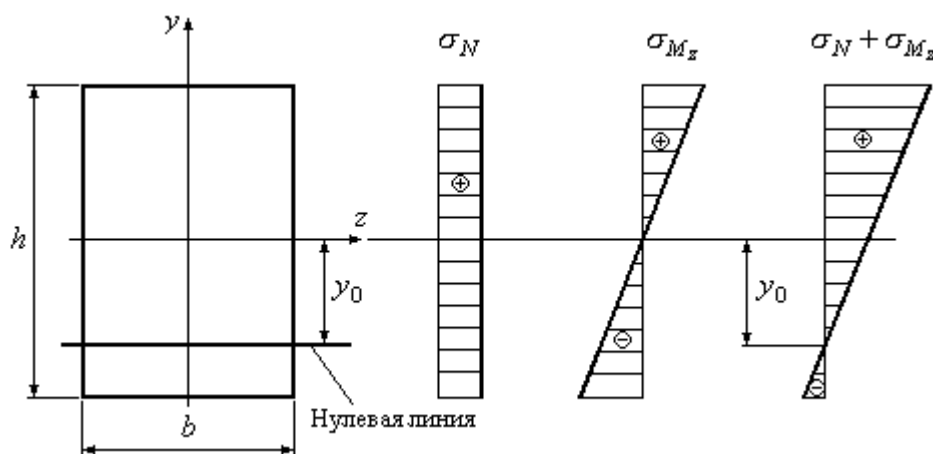


Рис.12.16

Уравнение нулевой линии получим, приравняв нулю выражение для напряжений:

$$\sigma_0 = \frac{N}{A} + \frac{M_z}{J_z} y_0 = 0, \quad (12.26)$$

откуда находим ординату нулевой линии

$$y_0 = - \frac{NJ_z}{AM_z}.$$

Максимальные напряжения действуют в волокнах, наиболее удаленных от нулевой линии. Условие прочности принимает вид:

$$\sigma_{\max} = \left| \pm \frac{N}{A} \pm \frac{M_z}{W_z} \right| \leq [\sigma]. \quad (12.27)$$

Условие прочности содержит две неизвестные величины – оевой момент сопротивления W_z и площадь поперечного сечения A . В большинстве случаев нормальные напряжения от изгиба больше, чем от растяжения или сжатия, поэтому при подборе сечения можно вначале опустить первое слагаемое и найти приближенное значение для момента сопротивления. Затем подбираются размеры поперечного сечения по найденной величине момента сопротивления. Размеры сечения берутся несколько большими требуемых и далее проверяется прочность выбранного сечения по формуле (12.27).

12.6. Внецентренное растяжение (сжатие) прямого бруса

Внецентренное растяжение (сжатие) относится к видам сложного сопротивления первой группы. Этот вид деформации вызывается действием

силы, параллельной продольной оси стержня, но не проходящей через центр тяжести поперечного сечения.

Рассмотрим брус с произвольной формой поперечного сечения, на который действует сила P , параллельная оси бруса и пересекающая любое поперечное сечение в точке A . Координаты этой точки в системе главных осей инерции сечения обозначим y_P и z_P (Рис.12.17). Расстояние точки A от центра тяжести сечения обозначим буквой e назовем эксцентриситетом точки приложения силы.

Приложим в точках B и O две пары уравновешенных системы сил. В результате получим две пары сил: P_{y_P} и P_{z_P} . Кроме того, в точке O появится сила P , действующая вдоль оси x . Эти внешние силы вызовут в произвольном поперечном сечении, лежащем на расстоянии x от основания фигуры, внутренние силовые факторы: $N = P$; $M_y = Pz_P$; $M_z = Py_P$.

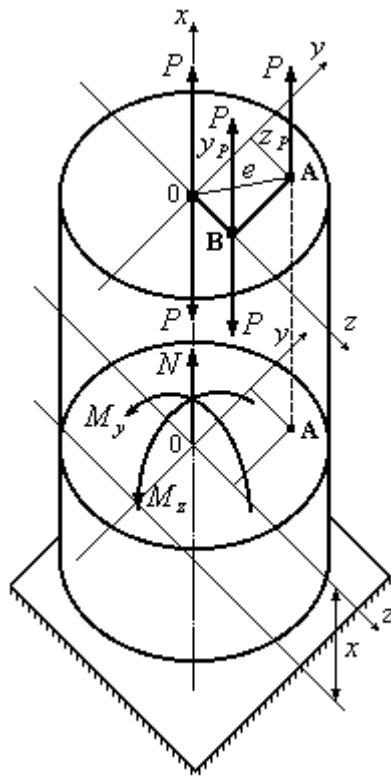


Рис.12.17

Таким образом, напряжения в произвольной точке поперечного сечения x будут складываться из напряжений, вызванных продольной силой N и напряжениями чистого изгиба, вызванных моментами M_z и M_y , по формуле (12.2). После несложных преобразований эту формулу можно преобразовать к виду, выразив внутренние усилия через внешнюю силу P :

$$\sigma = \pm \frac{P}{A} \left(1 + \frac{y_{PA}}{J_z} y + \frac{z_{PA}}{J_y} z \right). \quad (12.28)$$

Принимая во внимание, что $\frac{J_z}{A} = i_z^2$; $\frac{J_y}{A} = i_y^2$ - квадраты радиусов инерции сечения относительно главных осей z и y , формулу (12.28) преобразуем к виду:

$$\sigma = \pm \frac{P}{A} \left(1 + \frac{y_P y}{i_z^2} + \frac{z_P z}{i_y^2} \right). \quad (12.29)$$

При определении напряжений по формуле (12.29) знак “+” принимается для случая, если сила P растягивающая. При сжимающей силе P перед скобкой в формуле (12.29) принимается знак “-”.

Поскольку при внецентренном растяжении или сжатии возникает осевое растяжение (сжатие) и чистый пространственный изгиб, все поперечные сечения стержня в одинаковой степени опасны. Опасные же точки в поперечном сечении найдем, построив нулевую линию. Уравнение нулевой линии получим, если приравняем нулю напряжения, вычисленные по формуле (12.29) в произвольной точке нулевой линии с координатами y_0 и z_0 :

$$\sigma_0 = 1 + \frac{y_P y_0}{i_z^2} + \frac{z_P z_0}{i_y^2} = 0. \quad (12.30)$$

Построим нулевую линию (Рис.12.18).

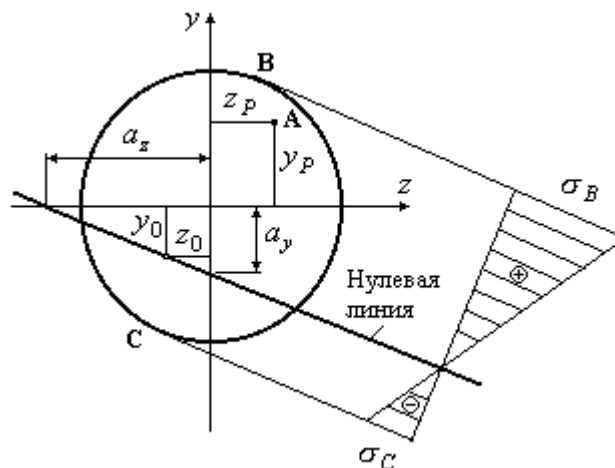


Рис.12.18

Так как координаты нулевой линии y_0 и z_0 входят в формулу (12.30) в первой степени, нулевая линия является прямой линией. Следовательно, ее можно построить, определив отрезки, которые нулевая линия отсекает на осях координат a_z и a_y . Для их определения зададим в формуле (12.30) значение $y_0 = 0$. Тогда, обозначив отрезок, который нулевая линия будет отсекать на оси z через a_z и вводя его в формулу (2.30) вместо z_0 , получим:

$$a_z = -\frac{i_y^2}{z_p}. \quad (12.31)$$

Задавая $z_0 = 0$ аналогичным образом из формулы (12.30) получим:

$$a_y = -\frac{i_z^2}{y_p}. \quad (12.32)$$

Откладываем найденные отрезки на осях координат (Рис.12.18) и строим нулевую линию.

Проанализируем поведение нулевой линии при внецентренном растяжении (сжатии):

1. Нулевая линия – прямая линия.
2. Нулевая линия не проходит через центр тяжести поперечного сечения.
3. Нулевая линия проходит через две четверти координат, ни одной из которых не принадлежит точка приложения силы (нулевая линия никогда не проходит через ту четверть, в которой лежит точка приложения силы).

Теперь, имея нулевую линию, проводим параллельно ей касательные к контуру сечения и находим наиболее напряженные точки В и С в растянутой и сжатой зонах сечения (Рис.12.18). Напряжения в этих точках и условия прочности имеют вид:

$$\sigma_{\max} = \sigma_B = \frac{P}{A} \cdot \left| 1 + \frac{y_p y}{i_z^2} + \frac{z_p z}{i_y^2} \right| \leq [\sigma]^+; \quad (12.33)$$

$$\sigma_{\min} = \sigma_C = \frac{P}{A} \cdot \left| 1 + \frac{y_p y}{i_z^2} + \frac{z_p z}{i_y^2} \right| \leq [\sigma]^-. \quad (12.34)$$

Координаты точек приложения силы y_p и z_p , а также координаты А и В, в которых определяются напряжения, проставляются в формулах (12.33) и (12.34) со своими знаками. Эпюра нормальных напряжений σ для рассматриваемого случая внецентренного растяжения приведена на рис.12.18.

Для прямоугольного сечения максимальные напряжения лежат в одной из угловых точек и условие прочности удобно использовать в таком виде:

$$\sigma_{\max} = |P| \left| \frac{1}{A} + \frac{y_p}{W_z} + \frac{z_p}{W_y} \right| \leq [\sigma]. \quad (12.35)$$

Выше был рассмотрен случай внецентренного растяжения. Полученные формулы (12.33)-(12.35) справедливы и для случая внецентренного сжатия при условии, если нет опасности возникновения продольного изгиба.

Рассмотрим несколько примеров решения задач на внецентренное растяжение и сжатие.

Пример 12.6. Стержень прямоугольного профиля в точке А подвергается действию растягивающей силы $P = 120 \text{ кН}$ (Рис.12.19). Определить наибольшие нормальные напряжения в сечении стержня.

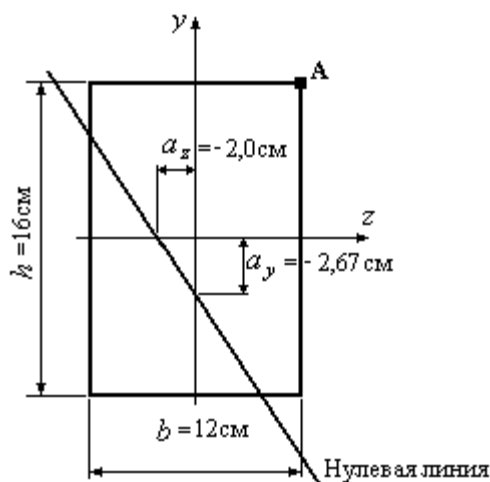


Рис.12.19

Решение:

1. Определяем моменты инерции и квадраты радиусов инерции сечения относительно главных осей y и z :

$$J_z = \frac{bh^3}{12} = \frac{12 \cdot 16^3}{12} = 4096,0 \text{ см}^4; \quad J_y = \frac{hb^3}{12} = \frac{16 \cdot 12^3}{12} = 2304,0 \text{ см}^4;$$

$$i_z^2 = \frac{J_z}{A} = \frac{4096}{192} = 21,33 \text{ см}^2; \quad i_y^2 = \frac{J_y}{A} = \frac{2304}{192} = 12 \text{ см}^2.$$

2. Определяем отрезки, определяемые нулевой линией на осях координат:

$$a_y = -\frac{i_z^2}{y_p} = -\frac{21,33}{8} = -2,67 \text{ см}; \quad a_z = -\frac{i_y^2}{z_p} = -\frac{12}{6} = -2,0 \text{ см}.$$

3. Строим нулевую линию (Рис.12.19).

4. Наиболее удаленной от нулевой линии является точка А. Напряжения в этой точке будут наибольшими:

$$\sigma_{\max} = \sigma_A = \frac{P}{A} \left(1 + \frac{y_p y_A}{i_z^2} + \frac{z_p z_A}{i_y^2} \right) = \frac{120 \cdot 10^3}{192 \cdot 10^{-4}} \left(1 + \frac{8 \cdot 8}{21,33} + \frac{6 \cdot 6}{12} \right) \cdot 10^{-6} = 43,75 \text{ МПа}.$$

Пример 12.7. В точках А двух колонн приложены сжимающие силы (Рис.12.20). При этом в точке С обеих колонн сжимающие напряжения оказались одинаковыми. Сравнить напряжения в точках В обеих колонн.

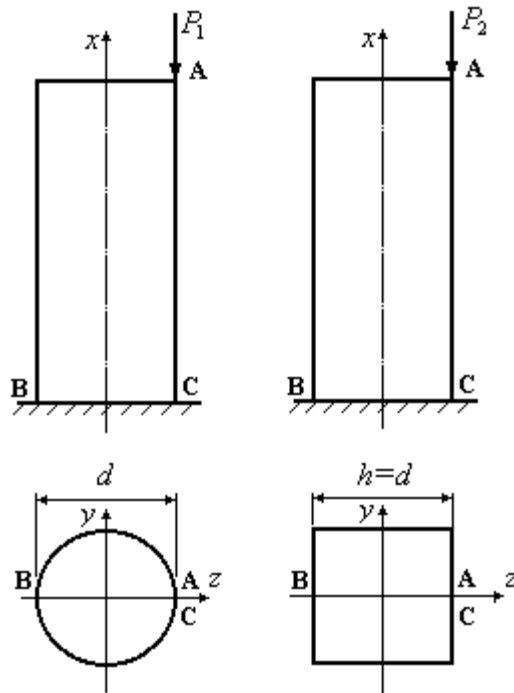


Рис.12.20

Решение:

1. Обозначим высоту второй колонны буквой b и, учитывая, что для второй колонны размер $h = d$, вычислим для каждой колонны квадраты радиусов инерции сечений относительно оси y .

Для первой (левой) колонны:

$$i_y^{(1)2} = \frac{J_y^{(1)}}{A_1} = \frac{\pi d^4}{64} \cdot \frac{4}{\pi d^2} = \frac{d^2}{16};$$

Для второй (правой) колонны:

$$i_y^{(2)2} = \frac{J_y^{(2)}}{A_2} = \frac{bd^3}{12 \cdot bd} = \frac{d^2}{12}.$$

2. Определяем напряжение в точке С для первой колонны:

$$\sigma_C^{(1)} = - \frac{P_1}{A_1^{(1)}} \left(1 + \frac{z_P z_C}{i_y^{(1)2}} \right) = - \frac{4P_1}{\pi d^2} \left(1 + \frac{\frac{d}{2} \cdot \frac{d}{2}}{\frac{d^2}{16}} \right) = - \frac{20P_1}{\pi d^2}. \quad (a)$$

3. Определяем напряжение в точке С для второй колонны:

$$\sigma_C^{(2)} = -\frac{P_2}{A_1^{(2)}} \left(1 + \frac{z_P z_C}{i_y^{(2)2}} \right) = -\frac{P_2}{bd} \left(1 + \frac{\frac{d}{2} \cdot \frac{d}{2}}{\frac{d^2}{12}} \right) = -\frac{4P_2}{bd}. \quad (\text{б})$$

4. По условию задачи нормальные напряжения в точке С для обеих колонн одинаковы, т.е. $\sigma_C^{(1)} = \sigma_C^{(2)}$. Приравнявая выражения (а) и (б), выражаем силу P_2 через силу P_1 :

$$P_2 = \frac{5P_1 bd}{\pi d^2}. \quad (\text{в})$$

5. Вычисляем нормальные напряжения в точке В сечения для первой колонны:

$$\sigma_B^{(1)} = -\frac{P_1}{A_1^{(1)}} \left(1 + \frac{z_P z_C}{i_y^{(1)2}} \right) = -\frac{4P_1}{\pi d^2} \left(1 - \frac{\frac{d}{2} \cdot \frac{d}{2}}{\frac{d^2}{16}} \right) = \frac{12P_1}{\pi d^2}. \quad (\text{г})$$

5. Вычисляем нормальные напряжения в точке В сечения для второй колонны:

$$\sigma_B^{(2)} = -\frac{P_2}{A_2^{(2)}} \left(1 + \frac{z_P z_C}{i_y^{(2)2}} \right) = -\frac{P_2}{bd} \left(1 - \frac{\frac{d}{2} \cdot \frac{d}{2}}{\frac{d^2}{12}} \right) = \frac{2P_2}{bd} = \frac{2}{bd} \cdot \frac{5P_1 bd}{\pi d^2} = \frac{10P_1}{\pi d^2}. \quad (\text{д})$$

6. Напряжение $\sigma_B^{(1)} > \sigma_B^{(2)}$. Составим их отношение:

$$\frac{\sigma_B^{(1)}}{\sigma_B^{(2)}} = \frac{12P_1}{\pi d^2} \cdot \frac{\pi d^2}{10P_1} = 1,2$$

Таким образом, напряжение в первой колонне на 20% выше, чем во второй.

Пример 12.8. В точках А и В колонны прямоугольного сечения приложены одинаковые силы (Рис.12.21а). Как изменится наибольшее сжимающее напряжение в колонне, если одну из сил удалить?

Решение:

1. Найдем напряжения в колонне, когда действуют две симметрично расположенные силы (Рис.12.21,б). Такое приложение сил является центральным. В этом случае нормальные напряжения от сжатия найдем из формулы:

$$\sigma = -\frac{2P}{bh}. \quad (a)$$

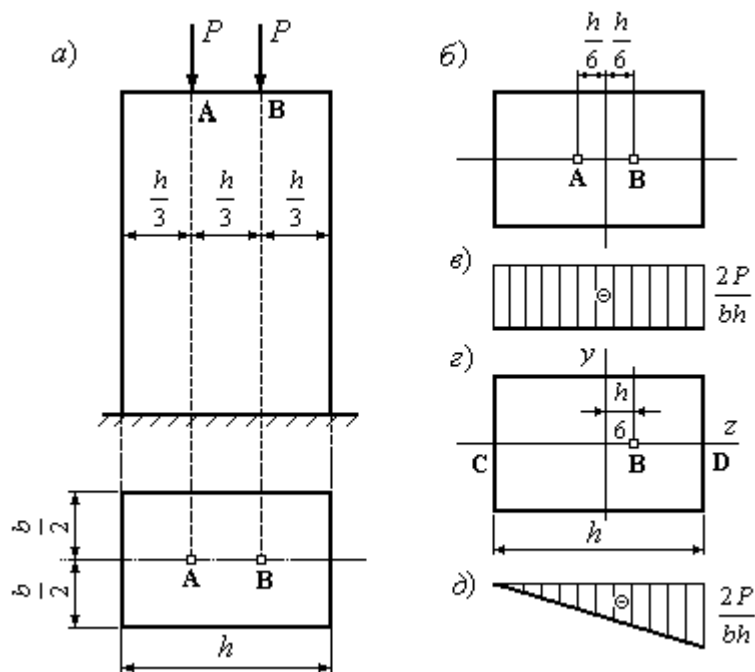


Рис.12.21

В каждой точке поперечного сечения напряжения одинаковы. Эпюра нормальных напряжений приведена на рис.12.21в.

2. Удалим одну из сжимающих сил, например, силу, действующую в точке А. Оставшаяся сила P , действующая в точке В сечения, вызовет внецентренное сжатие. Установим опасные точки сечения. С этой целью построим нулевую линию. Уравнение нулевой линии имеет вид:

$$\sigma_0 = -\frac{P}{A} \left(1 + \frac{z_P z_0}{i_y^2} \right) = 0.$$

Решая это уравнение относительно $a_z = z_0$, получим:

$$a_z = -\frac{i_y^2}{z_P} = -\frac{h^2}{\frac{h}{6}} = -\frac{h}{2}.$$

Нулевая линия совпадает с левой кромкой сечения. Напряжения в точке С, принадлежащей этой кромке, равно нулю. Наибольшее сжимающее напряжение возникнет в точке D правой кромки сечения. Вычислим эти напряжения:

$$\sigma_D = -\frac{P}{A} \left(1 + \frac{z_P z_D}{i_y^2} \right) = -\frac{P}{bh} \left(1 + \frac{\frac{h}{6} \cdot \frac{h}{2}}{\frac{h^2}{12}} \right) = -\frac{2P}{bh}. \quad (6)$$

На рис.12.21,г приведена эпюра распределения нормальных напряжений по площади сечения. Максимальные по величине напряжения возникают в точке D сечения.

3. Сравнивая напряжения σ_D в точке D с напряжениями σ , вызванными двумя одинаковыми симметрично расположенными силами (а), приходим к выводу, что на вопрос, изменится ли наибольшее сжимающее напряжение в колонне, если одну из сил удалить, можно ответить, что наибольшее нормальное сжимающее напряжение в сечении *не изменится*.

12.7. Понятие о ядре сечения

Рассмотрим некоторые характерные особенности, связанные с поведением нулевой линии при различных положениях силы P (Рис.12.22). Если сила приложена в центре тяжести сечения при $z_P = 0$, то нулевая линия отсекает на оси Oz отрезок, равный бесконечности:

$$a_z = -\frac{i_y^2}{z_P} = -\frac{i_y^2}{0} = \infty.$$

Это означает, что нулевая линия будет параллельной оси Oy .

Пусть сила P перемещается по некоторой прямой OA , проходящей через центр тяжести сечения, но не совпадающей ни с одной из главных осей инерции, в этом случае нулевая линия будет перемещаться параллельно самой себе (Рис.12.22). Для доказательства запишем отношение отрезков, отсекаемых нулевой линией на осях координат:

$$\frac{a_y}{a_z} = \left(\frac{i_z}{i_y} \right)^2 \frac{z_P}{y_P} = \left(\frac{i_z}{i_y} \right)^2 \operatorname{tg} \alpha.$$

Отсюда можно сделать вывод, что тангенс угла наклона нулевой линии $\frac{a_y}{a_z}$ не зависит от численного значения координат точки приложения силы, а зависит от их отношения.

Пусть теперь сила P перемещается по оси Oz от центра тяжести к краю сечения. В этом случае нулевая линия перемещается из бесконечности по направлению к сечению, оставаясь все время параллельной оси Oy . На рис.12.22 показаны точки приложения силы 1,2,3,4. Нулевая линия при этом соответственно занимает положение I-I, II-II, III-III, IV-IV.

Пусть сила P перемещается по некоторой прямой OA , проходящей через центр тяжести сечения, но не совпадающей ни с одной из главных осей инерции, в этом случае нулевая линия будет перемещаться параллельно самой себе.

Рассмотрим еще одну характерную особенность поведения нулевой линии. Пусть сила P перемещается по некоторой прямой AB , не проходящей через центр тяжести сечения (Рис.12.23). Для двух крайних случаев, когда сила приложена в точках A и B , нулевые линии параллельны соответствующим осям Oz и Oy .

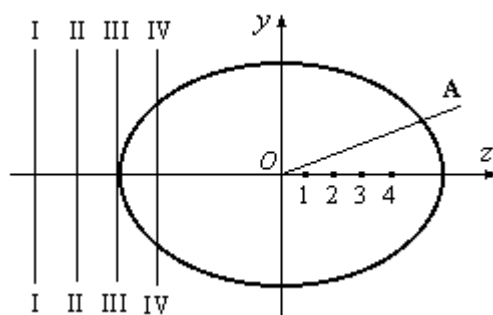


Рис.12.22

Пусть эти линии пересекаются в некоторой точке D . Так как эта нулевая линия принадлежит двум нулевым линиям, то напряжения в ней от двух сил, одновременно приложенных в точках A и B , равны нулю. Приложим теперь силу в точке C , лежащей на прямой AB (Рис.12.23). Эту силу можно разложить на две параллельные составляющие P_A и P_B , приложенных в точках A и B . От этих двух составляющих, а следовательно, и от их равнодействующих напряжения в точке D будут равны нулю. Так как точка C была взята произвольно, то при любом положении силы P на прямой AB напряжение в точке D равно нулю.

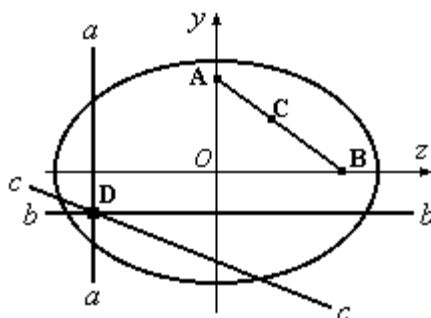


Рис.12.23

Отсюда можно сделать вывод, что при движении точки приложения силы по прямой АВ нулевая линия вращается вокруг точки D, занимая последовательно положения $b-b$, $c-c$, $a-a$.

Рассмотрим случай внецентренного сжатия колонны произвольного поперечного сечения. Пусть сила P перемещается от центра тяжести сечения по прямой ОА (Рис.12.24). Нулевая линия также перемещается из бесконечности по направлению к центру тяжести сечения, оставаясь все время параллельной первоначальному своему положению.

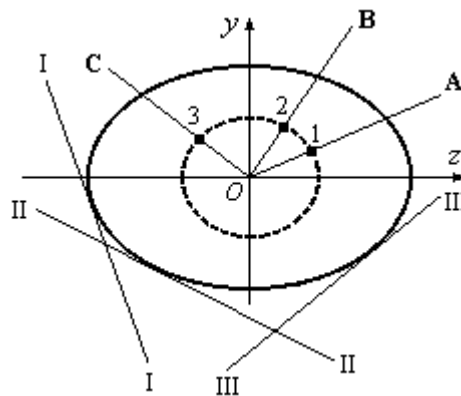


Рис.12.24

В процессе своего перемещения нулевая линия коснется сечения в какой-либо точке и займет положение I-I. Этому положению нулевой линии на прямой ОА будет соответствовать точка №1, к которой будет приложена сила P . Если силу передвинуть за точку №1 дальше от центра тяжести, то нулевая линия также переместится и пересечет сечение, разделив его на сжатую и растянутую зону. Таким образом, точка №1 лежит на границе области, за пределы которой нельзя перемещать силу, если мы не хотим, чтобы в поперечном сечении появились растягивающие напряжения.

Точно так же на прямых ОВ и ОС можно определить точки №2 и №3, обладающие теми же свойствами, что и точка №1. Касательные II-II и III-III являются нулевыми линиями для тех случаев, когда сила приложена в точках №2 и №3.

Если теперь мысленно провести бесконечное множество прямых, исходящих из точки О, и определить на них граничные точки, то геометрическое место этих точек образуют кривую, которая вокруг центра тяжести сечения очертит некоторую область, называемую *ядром сечения*, т.е. область, характерную тем, что всякая продольная сила, приложенная внутри этой области, вызывает во всех точках поперечного сечения напряжения одного знака.

Очень важно заранее знать размеры ядра сечения и его форму для конструкций, изготовленных из материалов, плохо работающих на растяжение

(камень, бетон, чугун и т.д.). Чтобы построить ядро сечения, необходимо рассмотреть всевозможные положения касательных к контуру сечения и, предполагая, что эти касательные являются нулевыми линиями, найти по отношению к главным осям инерции сечения соответствующие координаты граничных точек ядра сечения, а затем по этим точкам очертить само ядро.

Пример 12.9. Построить ядро сечения для прямоугольного сечения со сторонами b и h (Рис.12.25,а).

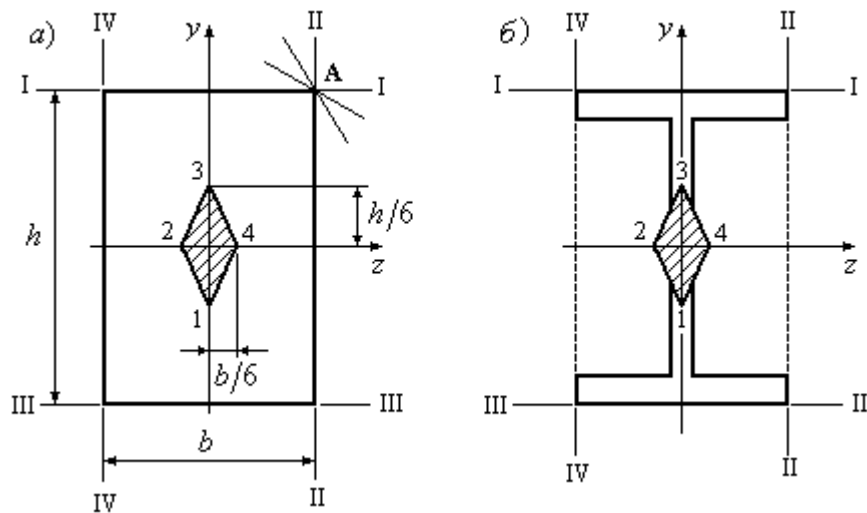


Рис.12.25

Решение:

1. Зададим положение для нулевой линии I-I таким образом, чтобы нулевая линия коснулась сечения и совпала с его верхней кромкой. В этом случае, отрезок, который нулевая линия отсечет на оси y , будет равен $a_y = \frac{h}{2}$.

Отрезок $a_z = \infty$.

2. Из уравнения нулевой линии находим граничное положение точки приложения силы P - координаты точки №1:

$$y_P^{(1)} = -\frac{i_z^2}{a_y} = -\frac{\frac{h^2}{12}}{\frac{h}{2}} = -\frac{h}{6}. \quad z_P^{(1)} = -\frac{i_y^2}{a_z} = -\frac{\frac{b^2}{12}}{\infty} = 0. \quad (\text{a})$$

3. Зададим положение для нулевой линии II-II таким образом, чтобы нулевая линия коснулась сечения и совпала с его правой кромкой. В этом случае, отрезок, который нулевая линия отсечет на оси z , будет равен $a_z = \frac{b}{2}$.

Отрезок $a_y = \infty$.

4. Из уравнения нулевой линии находим граничное положение точки приложения силы P - координаты точки №2:

$$z_P^{(2)} = -\frac{i_y^2}{a_z} = -\frac{\frac{b^2}{2}}{\frac{b}{6}} = -\frac{b}{6}. \quad y_P^{(2)} = -\frac{i_z^2}{a_y} = -\frac{\frac{h^2}{\infty}}{\infty} = 0. \quad (6)$$

5. Задавая подобным образом положение для нулевой линии III-III и IV-IV, найдем координаты точек №3 и №4:

$$y_P^{(3)} = -\frac{i_z^2}{a_y} = -\frac{\frac{h^2}{2}}{\frac{h}{6}} = -\frac{h}{6}. \quad z_P^{(3)} = -\frac{i_y^2}{a_z} = -\frac{\frac{b^2}{\infty}}{\infty} = 0; \quad (B)$$

$$z_P^{(4)} = -\frac{i_y^2}{a_z} = -\frac{\frac{b^2}{2}}{\frac{b}{6}} = -\frac{b}{6}. \quad y_P^{(4)} = -\frac{i_z^2}{a_y} = -\frac{\frac{h^2}{\infty}}{\infty} = 0. \quad (Г)$$

6. Откладываем найденные координаты от осей координат и строим точки №1, №2, №3 и №4. Чтобы установить, каким образом соединять точки №1, №2, №3 и №4, будем вращать нулевую линию, проходящую через точку А сечения, переводя ее из положения I-I в положение II-II. На основании доказанного выше в этом случае любая точка, лежащая на отрезке 1-2, будет перемещаться по прямой линии. Поэтому, завершая построение ядра сечения, соединяем точки приложения силы №1, №2, №3 и №4 прямыми линиями (Рис.12.25,а).

Ядро сечения для прямоугольного сечения представляет собой ромб. Такую же форму будет иметь ядро сечения для любой фигуры, которая имеет две оси симметрии и вписывается в прямоугольник, например, двутавр (Рис.12.25,б).

Для круглого сплошного сечения радиуса R ввиду его полярной симметрии ядро сечения также имеет форму круга, радиус которого r найдем из формулы:

$$r = -\frac{J_z}{AR} = -\frac{\pi R^4}{4\pi R^2 R} = -\frac{R}{4}. \quad (12.36)$$

12.8. Изгиб с кручением

Различные детали машин, такие как распределительные валы, оси моторных вагонов электропоездов и трамваев, коленчатые валы, валы редукторов и т.д. испытывают одновременное действие изгиба и кручения. При этом давление зубьев на шестерни, натяжение ремней, собственный вес вала и

шкивов вызывают в поперечных сечениях вала следующие внутренние силовые факторы: изгибающие моменты M_x и M_y , крутящий момент $M_{кр}$, поперечные силы Q_y, Q_z . Влиянием поперечных сил при изгибе с кручением, как правило, пренебрегают. Таким образом, в любом поперечном сечении возникают нормальные напряжения от изгиба в одной или двух плоскостях и касательные напряжения от кручения.

Прежде, чем приступать к непосредственному расчету валов на изгиб с кручением, необходимо найти опасные сечения и установить вид напряженного состояния, возникающего в детали.

Рассмотрим ломаный стержень круглого поперечного сечения, защемленный на одном конце и свободный на другом (Рис.12.26а).

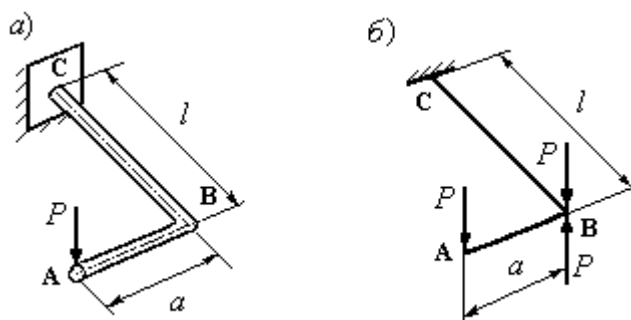


Рис.12.26

Расчетная схема ломаного стержня представлена на рис.12.26,б.

Чтобы найти опасное сечение, разложим сложный вид сопротивления, каким является изгиб с кручением, на простые: плоский поперечный изгиб и кручение. Для этого приложим в точке В две равные по величине и противоположно направленные силы P . Две из этих сил создадут пару сил с моментом $M = Pa$. Таким образом, элемент ломаного стержня АВ испытывает плоский поперечный изгиб, а элемент ВС испытывает изгиб с кручением. Построим эпюры изгибающих и крутящих моментов для элемента стержня ВС (Рис.12.27,а).

Применяя принцип суперпозиции, нагрузим элемент ВС только силой P (Рис.12.27,б) и построим эпюру изгибающих моментов от этой силы $M_{и}$ (Рис.12.27,в).

Нагрузим элемент ВС только внешним моментом M (Рис.12.27г), вычислим крутящий момент $M_{кр} = M$ и построим эпюру крутящих моментов $M_{кр}$ (Рис.12.27,д).

Анализируя вид эпюр, представленных на рис.12.27,в и 12.27,д, приходим к выводу, что наиболее опасным является сечение С, так как в этом сечении возникает наибольший изгибающий момент $|M_{и}| = Pl$ и наибольший крутящий момент $|M_{кр}| = Pa$.

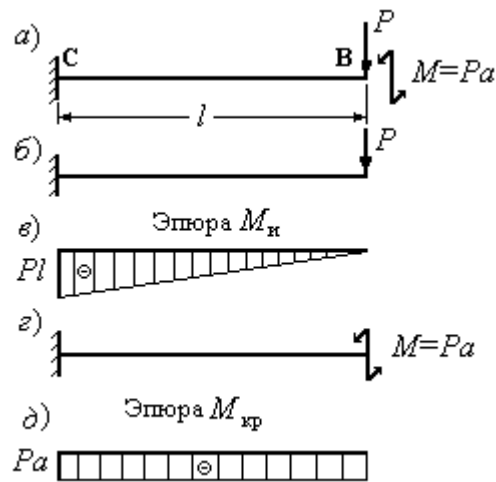


Рис.12.27

Найдем теперь опасные точки в сечении С (Рис.12.28,а). Для этого вычислим в опасном сечении максимальные нормальные напряжения от изгиба σ и наибольшие касательные напряжения от кручения τ и построим эпюры распределения нормальных (Рис.12.28,б) и касательных напряжений (Рис.12.28,в).

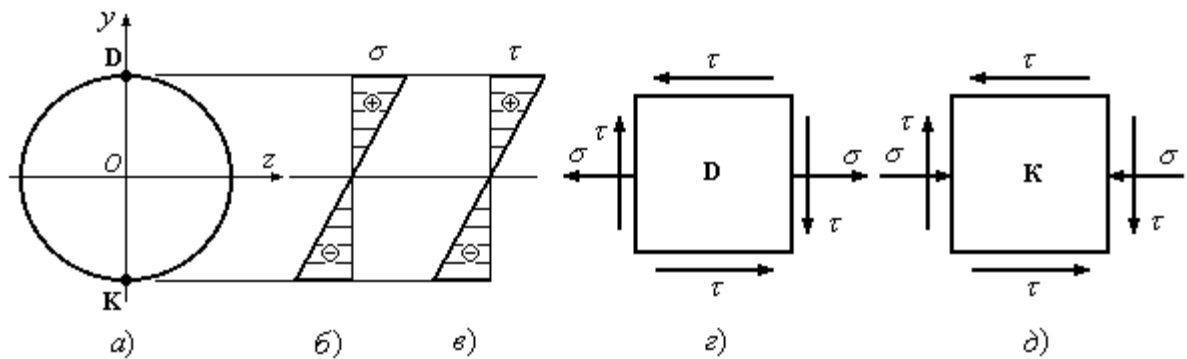


Рис.12.28

Опасными точками в сечении С являются точки D и К. При изгибе нормальные напряжения определяются по формуле (5.13):

$$\sigma = - \frac{M \cdot y}{J_z}.$$

Максимальные нормальные напряжения возникают в наиболее удаленных точках поперечного сечения. Такими точками являются точки D и К. Напряжения в этих точках найдем с использованием формулы (5.15):

$$\sigma_{\max} = \frac{M_n}{W_z} \quad (12.37)$$

Касательные напряжения от кручения определяются по формуле (11.31):

$$\tau_{\rho} = \frac{M_{кр} \rho}{J_p}.$$

Наибольшие касательные напряжения возникают также в наиболее удаленных точках поперечного сечения D и K. Для определения максимальных касательных напряжений воспользуемся формулой (11.32):

$$\tau_{\max} = \frac{M_{кр}}{W_p}. \quad (12.38)$$

Таким образом, при изгибе с кручением в поперечных сечениях в одной и той же точке, наиболее удаленной от центра тяжести сечения, одновременно возникают максимальные нормальные и максимальные касательные напряжения. На рис.12.28,г показано, как действуют эти напряжения в точке D, на рис.12.28,д – то же для точки K.

Напряженное состояние приведенное на рисунках 12.28,в и 12.28,д является сложным. Принцип простого суммирования напряжений в этом случае неприменим. Поэтому изгиб с кручением и относится *ко второй группе* видов сложного сопротивления. Для оценки прочности в случае возникновения сложного напряженного состояния применяются теории прочности.

В данном случае при изгибе с кручением в опасном поперечном сечении C возникает плоское напряженное состояния. Применим для оценки прочности третью теорию прочности – теорию наибольших касательных напряжений. Расчетные или эквивалентные напряжения вычислим по формуле (10.33):

$$\sigma_{\text{эkv}}^{(3)} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq [\sigma].$$

Подставим в приведенную формулу максимальные нормальные и касательные напряжения (12.37), 12.38). Получим:

$$\sigma_{\text{эkv}}^{(3)} = \sqrt{\left(\frac{M_{и}}{W_z}\right)^2 + 4\left(\frac{M_{кр}}{W_p}\right)^2} = \frac{\sqrt{M_{и}^2 + M_{кр}^2}}{W_z} = \frac{M_{пр}}{W_z} \leq [\sigma]. \quad (12.39)$$

При выводе формулы (12.39) принималось для круглого сечения $W_p = 2W_z$. Это условие после несложных преобразований можно получить из условия инвариантности суммы моментов инерции относительно двух взаимно перпендикулярных осей (4.34).

Буквой $M_{пр}$ в формуле (12.39) обозначен так называемый приведенный момент, который в соответствии с третьей теорией прочности имеет вид:

$$M_{пр}^{(3)} = \sqrt{M_{и}^2 + M_{кр}^2}. \quad (12.40)$$

В соответствии с четвертой (энергетической) теорией прочности приведенный момент записывается следующим образом:

$$M_{\text{пр}}^{(3)} = \sqrt{M_{\text{и}}^2 + 0,75M_{\text{кр}}^2}. \quad (12.40)$$

Следует отметить, что сложение моментов под корнем при вычислении приведенного момента не несет никакого физического смысла. Это все лишь результат применения той или иной теории прочности.

Рассмотрим несколько примеров расчета элементов конструкций, испытывающих изгиб с кручением.

Пример 12.10. Полый стальной вал, внутренний диаметр которого d составляет 0,6 наружного D , в опасном сечении подвергается действию изгибающего момента $M_{\text{и}} = 90$ кНм и крутящего момента $M_{\text{кр}} = 120$ кНм. Определить наружный и внутренний диаметры вала при допуске напряжении $[\sigma] = 120$ МПа. Использовать теорию наибольших касательных напряжений.

Решение:

1. По формуле (12.39) найдем приведенный момент по третьей теории прочности:

$$M_{\text{пр}}^{(3)} = \sqrt{M_{\text{и}}^2 + M_{\text{кр}}^2} = \sqrt{90^2 + 120^2} = 150 \text{ кНм}.$$

2. Из условия прочности (12.38) определяем требуемый момент сопротивления сечения:

$$W_z = \frac{M_{\text{пр}}}{[\sigma]} = \frac{150 \cdot 10^3}{120 \cdot 10^6} 10^6 = 1250 \text{ см}^3.$$

3. Обозначим отношение внутреннего диаметра к внешнему буквой α и составим выражение для осевого момента сопротивления поперечного сечения вала:

$$W_z = \frac{\pi D^3}{32} (1 - \alpha^4).$$

Откуда находим внешний диаметр сечения

$$D = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot W_z}{\pi(1 - \alpha^4)}} = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 1250}{3,14 \cdot (1 - 0,6^4)}} = 24,46 \text{ см} = 245 \text{ мм}.$$

4. Определяем внутренний диаметр вала $d = \alpha \cdot D = 0,6 \cdot 245 = 147$ мм.

Пример 12.11. Определить наибольшее расчетное напряжение в стальном стержне АВ круглого поперечного сечения диаметром $d = 4$ мм, нагруженном

двумя одинаковыми грузами $P=1\text{кН}$, приложенными, как указано на рис. 12.29,а. Чему будет равно наибольшее расчетное напряжение в стержне, если один из грузов будет снят? Использовать четвертую теорию прочности.

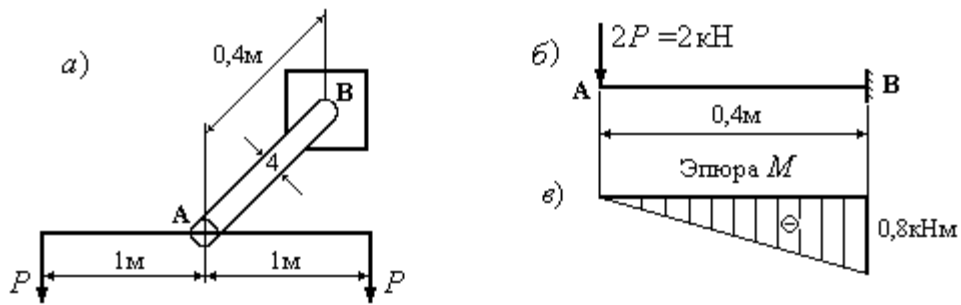


Рис.12.29

Решение:

1. Найдем расчетные напряжения в стержне АВ для случая, когда оба груза действуют на стержень. Для этого составим расчетную схему. Грузы одинаковые и симметрично приложены, действуют в одном направлении. Следовательно, стержень АВ испытывает плоский поперечный изгиб. Расчетная схема стержня приведена на рис.12.29,б. Эпюра изгибающих моментов приведена на рис.12.29,в, из которой видно, что опасным сечением является сечение В. Максимальное напряжение в этом сечении найдем по формуле

$$\sigma_{\max} = \frac{|M_{\max}|}{W_z} = \frac{2P \cdot 0,4}{\frac{\pi \cdot d^3}{32}} = \frac{2 \cdot 1 \cdot 10^3 \cdot 0,4}{\frac{3,14 \cdot 0,04^3}{32}} 10^{-6} = 127,32 \text{ МПа.}$$

Это напряжение и будет расчетным.

2. Снимем левый груз (Рис.12.30,а). В этом случае стержень АВ будет изгибаться силой $P=1\text{кН}$ и одновременно скручиваться моментом $M=P \cdot l=1\text{кНм}$. Расчетная схема представления на рис.12.30,б.

Раскладываем сложный вид деформации на два простых. Вначале нагружаем стержень АВ силой P (Рис.12.30,в) и строим эпюру изгибающих моментов (Рис.12.30,г). Затем нагружаем стержень АВ внешним моментом M и строим эпюру крутящих моментов (Рис.12.30,е).

3. Анализируя эпюры изгибающих моментов и крутящих моментов, устанавливаем опасное сечение. Таким сечением является сечение В: $M_{и} = 0,4\text{кНм}$; $M_{кр} = 1,0\text{кНм}$

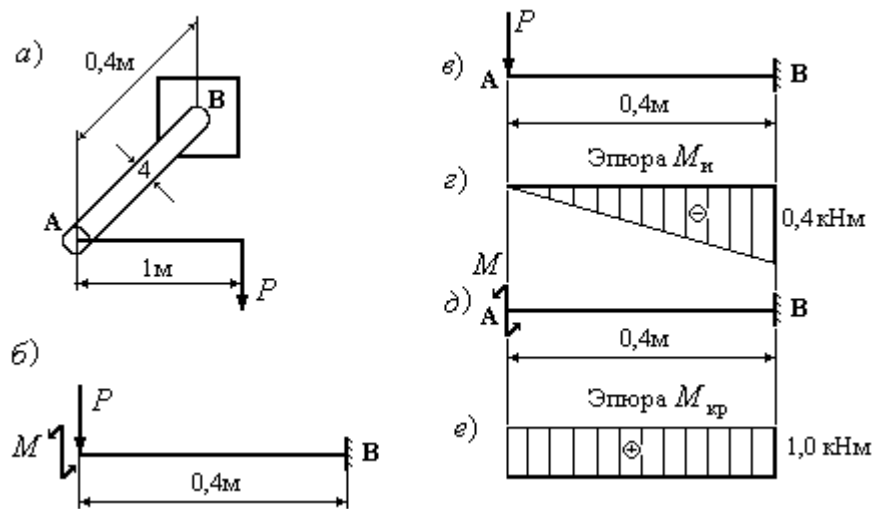


Рис.12.30

4. Определяем приведенный момент, используя четвертую теорию прочности:

$$M_{пр} = \sqrt{M_{изг}^2 + 0,75M_{кр}^2} = \sqrt{0,4^2 + 0,75 \cdot 1,0^2} = 0,954 \text{ кНм}$$

и определяем расчетные напряжения

$$\sigma_{экв}^{(4)} = \frac{M_{пр}}{W_z} = \frac{0,954 \cdot 10^3}{\frac{\pi \cdot d^3}{32}} = \frac{0,954 \cdot 10^3 \cdot 32}{3,14 \cdot 0,04^3} \cdot 10^{-6} = 151,82 \text{ МПа.}$$

Пример 12.12. Из условия прочности по теории наибольших касательных напряжений определить наибольшую допускаемую величину груза P , которую можно поднять при помощи ворота (Рис.12.31,а). Вал ворота круглого поперечного сечения диаметром $d = 30$ мм. Допускаемое напряжение для материала вала $[\sigma] = 80$ МПа.

Решение:

1. Составим расчетную схему (Рис.12.31,б). Из расчетной схемы следует, что вал испытывает деформацию изгиба от силы P и кручение от момента $M = P \cdot 0,18$. В связи с этим раскладываем сложный вид сопротивления на два простых – плоский поперечный изгиб и кручение.

2. Изображаем вал как балку (Рис.12.31,в), нагружаем ее силой P посередине пролета и строим эпюру изгибающих моментов (Рис.12.31,г). Максимальный изгибающий момент $M = 0,2P$ возникает в сечении В.

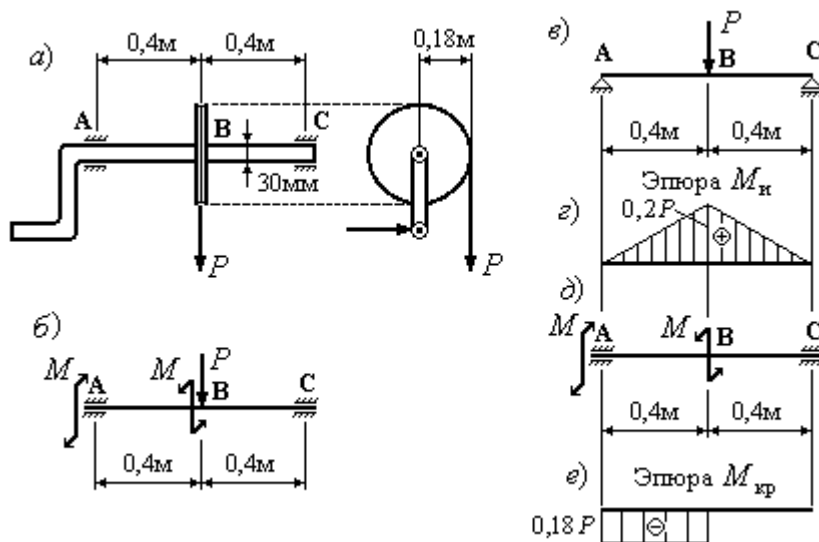


Рис.12.31

3. Изображаем вал и нагружаем его только внешними моментами $M = 0,18P$ (Рис.12.31,д) и строим эпюру крутящих моментов (Рис.12.31,е). Крутящий момент $M_{кр} = 0,18P$ имеет постоянную величину и действует только на участке вала АВ.

4. Определяем опасное сечение. Из эпюр изгибающих M_n и крутящих $M_{кр}$ моментов следует, что опасным сечением является сечение В: $M_n = 0,2P$; $M_{кр} = 0,18P$.

5. Вычисляем приведенный момент для опасного сечения, используя третью теорию прочности:

$$M_{пр} = \sqrt{M_n^2 + M_{кр}^2} = \sqrt{(0,2P)^2 + (0,18P)^2} = 0,269P.$$

6. Из условия прочности по третьей теории находим максимальную допускаемую величину груза P :

$$\sigma_{эkv}^{(3)} = \frac{0,269P}{W_z} \leq [\sigma], \quad \text{откуда } P_{доп} = \frac{W_z [\sigma]}{0,269} = \frac{\frac{\pi \cdot d^3}{32} [\sigma]}{0,269} = \frac{3,14 \cdot 0,03^3 \cdot 80 \cdot 10^6}{32 \cdot 0,269} \cdot 10^{-3} = 0,788 \text{ кН.}$$

12.9. Кручение с растяжением. Общий случай изгиба, растяжения и кручения

При этом виде сложного сопротивления также возникает в опасных точках сечения элементов конструкций сложное напряженное состояние. В связи с этим этот вид деформации можно также отнести ко второй группе видов сложного сопротивления. Так же, как и при изгибе с кручением оценку прочности производят с применением теорий прочности. Однако, в отличие от изгиба с кручением при кручении с растяжением приведенный момент не вычисляют, так как нормальные напряжения, возникающие в сечении элемента

конструкции, вычисляются по иной формуле ($\sigma = \frac{N}{A}$). В связи с этим несколько меняется методика определения расчетных напряжений. Так же, как при изгибе с кручением, сложный вид деформации раскладывается на ряд простых – растяжение и кручение. Для каждого из этих видов деформации строятся эпюры распределения внутренних силовых факторов, отыскивается опасное сечение и для опасных точек сечения находятся нормальные и касательные напряжения от каждого внутреннего силового фактора в отдельности и подставляются *непосредственно* в выражения для расчетных напряжений. Например, при использовании теории наибольших касательных напряжений формула для расчетных напряжений принимает вид:

$$\sigma_{\text{экв}}^{(3)} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} = \sqrt{\left(\frac{N}{A}\right)^2 + 4\left(\frac{M_{\text{кр}}}{W_p}\right)^2} \leq [\sigma] . \quad (12.41)$$

По четвертой теории прочности эта формула имеет вид:

$$\sigma_{\text{экв}}^{(4)} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} = \sqrt{\left(\frac{N}{A}\right)^2 + 3\left(\frac{M_{\text{кр}}}{W_p}\right)^2} \leq [\sigma] . \quad (12.41)$$

Приведенные выше формулы удобно использовать при решении задачи проверки напряжений, когда известны значения внутренних силовых факторов N и $M_{\text{кр}}$. Решение задачи проекторочного расчета, когда размеры поперечного сечения неизвестны, приходится либо заранее задаваться значениями размеров сечения при известной его форме, либо поступать так, как поступают при внецентренном растяжении или сжатии: пренебрегают влиянием одного из внутренних силовых факторов, например, продольной силы. Затем вычисляют размеры поперечного сечения, берут несколько завышенные результаты, а затем по формулам (12.40), (12.41) выполняют проверку напряжений.

Еще сложнее является задача определение величины допускаемой нагрузки, так как в отличие от изгиба с кручением при этом виде деформации внутренние силовые факторы вызываются разными внешними силами.

Таким образом, мы рассмотрели расчет элементов конструкций и деталей машин, испытывающих сложное сопротивление различных видов, принадлежащих двум группам: первой группе, когда в опасных точках поперечного сечения возникает линейное напряженное состояние и применим принцип прямого суммирования напряжений, вызванных разными силовыми факторами (пространственный и кривой изгиб, изгиб с растяжением и сжатием, внецентренное растяжение и сжатие), и второй, когда в опасных точках сечения возникает сложное напряженное состояние, и для оценки прочности необходимо применять теории прочности (изгиб с кручением, кручение с растяжением). В обоих случаях сложный вид деформации раскладывается на ряд простых, в обоих случаях строятся эпюры распределения внутренних

силовых факторов и находится опасное сечение, определяются опасные точки и напряжения в этих точках от каждого из внутренних силовых факторов в отдельности. И только на последнем этапе получения расчетных напряжений методики расчета отличаются способом оценки прочности.

Кроме рассмотренных выше видов сложного сопротивления существует *общий* случай совместного действия изгиба, растяжения и кручения, когда в поперечных сечениях элемента конструкции возникают все шесть внутренних силовых факторов. Опасных точек в этом случае может быть несколько (Рис.12.32).

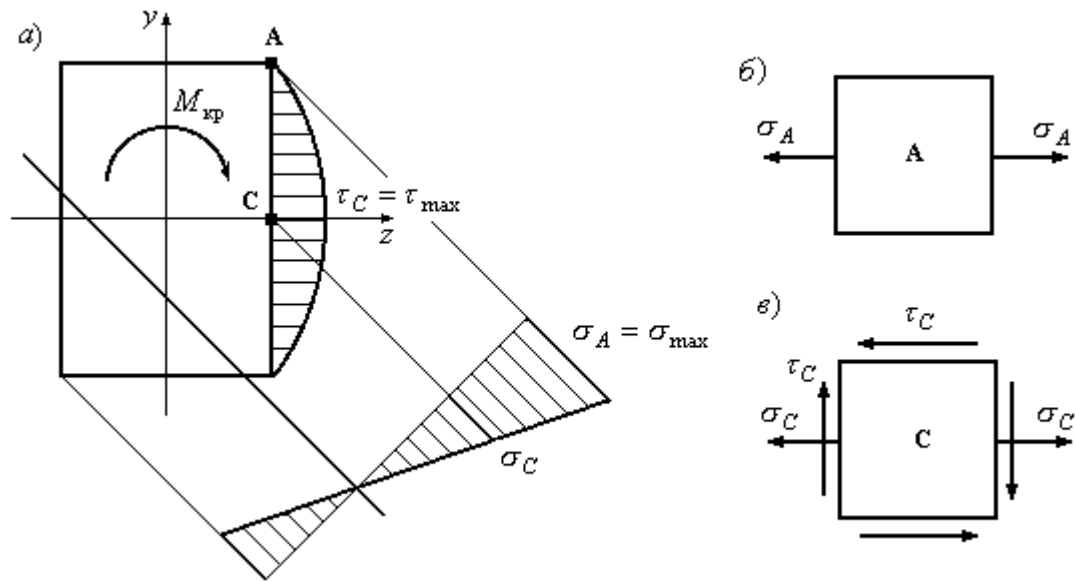


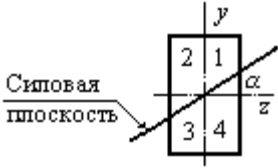
Рис.12.32

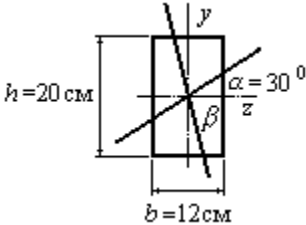
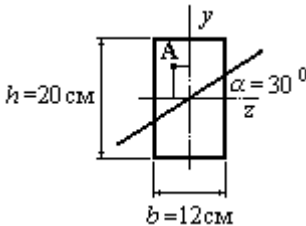
На рис.12.32,а приведен общий случай изгиба, растяжения и кручения стержня прямоугольного поперечного сечения. Опасных точек здесь две: точка А и точка С. В точке А возникает *линейное напряженное состояние* (Рис.12.32,б). Условие прочности принимает вид (12.6).

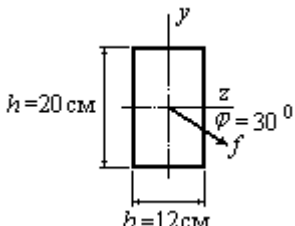
В точке С возникают *плоское напряженное состояние* (Рис.12.32,в). Максимальные касательные напряжения действуют в точке С и могут быть найдены с помощью формулы (11.44), нормальные напряжения в точке С можно определить с помощью формулы (12.2). Оценку прочности в точке С можно выполнить с применением теории наибольших касательных напряжений и энергетической теории, подставляя найденные в точке С нормальные и касательные напряжения непосредственно в формулы (12.41) или (12.42).

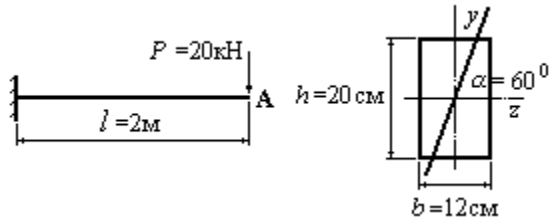
12.10. Тесты к теме №12 «Сложное сопротивление»»

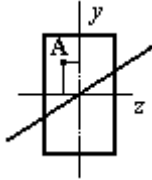
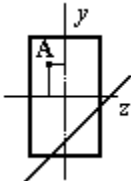
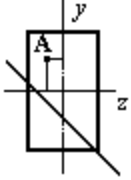
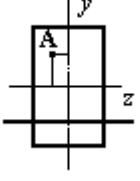
№	Вопрос	Время на ответ, сек
1	Какой вид деформации в сопротивлении материалов называется сложным?	30
	1. Сложным с точки зрения расчетной процедуры.	
	2. Сложный с точки зрения создания расчетной схемы.	
	3. Сложный с точки зрения собирания нагрузок.	
	4. Сложный с точки зрения комбинации разных простых видов деформации.	
2	Какой из перечисленных видов деформации является простым?	30
	1. Изгиб с кручением.	
	2. Внецентренное растяжение.	
	3. Косой изгиб.	
	4. Растяжение (сжатие).	
	5. Растяжение с изгибом.	
3	Какой принцип используют при расчете элементов конструкций и деталей машин при сложном сопротивлении?	30
	1. Принцип Сен-Венана.	
	2. Принцип Даламбера.	
	3. Принцип суперпозиции.	
	4. Принцип возможных перемещений.	
4	Какой вид деформации называется пространственным изгибом? Если силы и моменты, действующие на балку:	30
	1. Лежат в плоскости симметрии балки.	
	2. Лежат в одной силовой плоскости, не совпадающей ни с одной из главных плоскостей.	
	3. Лежат в разных плоскостях, проходящих через ось балки.	
	4. Лежат в плоскости, не проходящей через ось балки.	
5	Что определяют при пространственном изгибе с помощью формулы	30
	1. Касательные напряжения.	
	2. Относительные деформации.	
	3. Нормальные напряжения.	
	4. Перемещения.	
6	Что при пространственном изгибе представляет собой выражение:	30
	$\operatorname{tg}\beta = -\frac{M_z}{M_y} \cdot \frac{J_y}{J_z}$	
	1. Уравнение Эйлера.	
	2. Уравнение Ламе.	
	3. Уравнение Лапласа.	

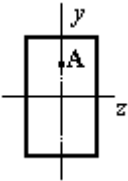
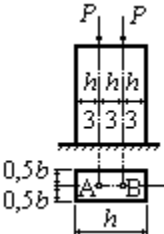
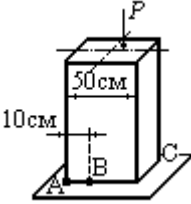
	4. Уравнение нулевой линии.	
7	Какой вид деформации называется плоским косым изгибом? Если силы и моменты, действующие на балку:	30
	1. Лежат в разных плоскостях, не проходящих через ось балки.	
	2. Лежат в плоскости, не проходящей через ось балки.	
	3. Лежат в плоскости симметрии балки, проходящей через ось балки.	
	4. Лежат в одной силовой плоскости, не совпадающей ни с одной из главных плоскостей.	
8	Через какие из четвертей поперечного сечения пройдет нулевая линия для сечения, изображенного на рисунке:	30
		
	1. Первую и третью четверти (1-3).	
	2. Вторую и четвертую четверти (2-4).	
	3. Вторую и третью четверти (2-3).	
	4. Первую и четвертую четверти (1-4).	
9	Какое из уравнений следует использовать при косом изгибе для определения положения нулевой линии?	30
	1. $tg\beta = - \frac{J_y}{J_z} ctg\alpha$	
	2. $tg\beta = - \frac{J_z}{J_y} ctg\alpha$	
	3. $tg\beta = - \frac{J_z}{J_y} tg\alpha$	
	4. $tg\beta = - \frac{J_y}{J_z} tg\alpha$	
10	Что определяют при плоском косом изгибе с помощью формулы: $- M \left(\frac{\sin \alpha}{J_z} y + \frac{ \cos \alpha }{J_y} z \right) = ?$	30
	1. Касательные напряжения	
	2. Нормальные напряжения.	
	3. Перемещения сечений.	
	4. Деформации.	
11	Что в определении для нулевой линии при плоском косом изгибе является неправильным?	30

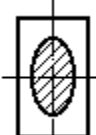
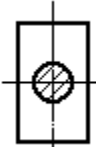
	1. Нулевая линия проходит через центр тяжести поперечного сечения.	
	2. Нулевая линия является прямой линией.	
	3. Нулевая линия никогда не проходит через те четверти координат, которым принадлежит след силовой плоскости.	
	4. Нулевая линия всегда перпендикулярна следу силовой плоскости.	
12	При какой форме поперечного сечения балка не испытывает деформации изгиба ?	30
	1. Прямоугольное сечение.	
	2. Двутавровое сечение.	
	3. Квадратное сечение.	
	4. Корытное сечение.	
13	Определить положение нулевой линии (найти угол β в градусах) для поперечного сечения, изображенного на рисунке при плоском косом изгибе.	240
		
14	Определить нормальное напряжение (в МПа) в точке А поперечного сечения балки при косом изгибе, если изгибающий момент $M = 20$ кНм. Координаты точки А: $y_A = 6$ см; $z_A = -2$ см.	300
		
15	Что определяют при косом изгибе с помощью выражения? $\sum_{j=1}^n \frac{\sin \alpha \cdot l_j}{6EJ_z} (Aa + 4Cc + Bb) = ?$	40
	1. Нормальное напряжение.	
	2. Полное перемещение сечения балки.	
	3. Проекцию полного вектора перемещений сечения на ось y .	
	4. Проекцию полного вектора перемещений сечения на ось z .	



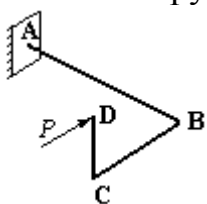
16	<p>Что определяют при косом изгибе с помощью выражения?</p> $\sum_{j=1}^n \frac{\sin \alpha \cdot J_j}{6EI_z} (Aa + 4Cc + Bb) = ?$	40
	1. Нормальное напряжение.	
	2. Полное перемещение сечения балки.	
	3. Проекцию полного вектора перемещений сечения на ось y .	
	4. Проекцию полного вектора перемещений сечения на ось z .	
17	<p>Каким образом ориентирован след плоскости изгиба по отношению к нулевой линии поперечного сечения при плоском косом изгибе при $h > b$?</p>	30
	1. Совпадает с нулевой линией.	
	2. Составляет с нулевой линией тупой угол.	
	3. Составляет с нулевой линией прямой угол.	
	4. Составляет с нулевой линией острый угол.	
18	<p>С помощью какого из выражений можно определить при плоскому косом изгибе угол наклона следа плоскости изгиба φ к оси z?</p>	40
	1. $\operatorname{tg} \varphi = \frac{J_z}{J_y} \operatorname{tg} \alpha$	
	2. $\operatorname{tg} \varphi = \frac{J_z}{J_y} \operatorname{ctg} \alpha$	
	3. $\operatorname{tg} \varphi = \frac{J_y}{J_z} \operatorname{tg} \alpha$	
	4. $\operatorname{tg} \varphi = \frac{J_y}{J_z} \operatorname{ctg} \alpha$	
19	<p>В результате изгиба балки центр тяжести сечения переместился в указанном направлении f ($\varphi = 30^\circ$ с осью z). Определить положение плоскости действия внешних сил (угол α с осью z).</p> 	300

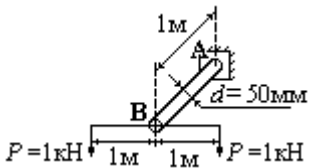
20	<p>Определить полный прогиб (в см) балки в сечении А при плоском косом изгибе. Материал балки – сталь с модулем упругости $E = 2 \cdot 10^5$ МПа. Размеры поперечного сечения и угол наклона силовой плоскости приведены на рисунке.</p> 	360
21	<p>Какой вид деформации называется внецентренным растяжением (сжатием)? Если равнодействующая сил, приложенных к стержню:</p>	30
	1. Совпадает с продольной осью стержня.	
	2. Действует параллельно продольной оси стержня.	
	3. Пересекает продольную ось стержня под острым углом.	
	4. Пересекает продольную ось стержня под прямым углом.	
22	<p>Какое напряженное состояние возникает при внецентренном растяжении (сжатии)?</p>	30
	1. Плоское.	
	2. Линейное.	
	3. Объемное.	
23	<p>Какой вид деформации возникает при внецентренном растяжении (сжатии)?</p>	30
	1. Чисты сдвиг.	
	2. Чистый изгиб.	
	3. Изгиб с растяжением.	
	4. Изгиб с кручением.	
	5. Растяжение с кручением.	
24	<p>Что определяют при внецентренном растяжении (сжатии) с помощью выражения:</p> $\pm \frac{P}{A} \left(1 + \frac{y_P y}{i_z^2} + \frac{z_P z}{i_y^2} \right) = ?$	30
	1. Потенциальную энергию деформации.	
	2. Перемещения поперечных сечений.	
	3. Нормальные напряжения в точках поперечного сечения.	
	4. Касательные напряжения в точках поперечного сечения.	
25	<p>Что в определении нулевой линии при внецентренном растяжении (сжатии) является неверным?</p>	30
	1. Нулевая линия – прямая линия.	
	2. Нулевая линия не проходит через центр тяжести поперечного сечения.	

	3. Нулевая линия никогда не проходит через четверть координат, которой принадлежит точка приложения равнодействующей внешних сил.	
	4. Нулевая линия всегда проходит через центр тяжести поперечного сечения.	
26	Какой вид принимает нулевая линия сечения при внецентренном растяжении (сжатии)?	40
	1. $1 - \frac{y_p y_0}{i_z^2} - \frac{z_p z_0}{i_y^2} = 0$	
	2. $1 + \frac{y_p z_0}{i_z^2} + \frac{z_p y_0}{i_y^2} = 0$	
	3. $1 + \frac{y_p y_0}{i_z^2} + \frac{z_p z_0}{i_y^2} = 0$	
	4. $1 + \frac{z_p z_0}{i_z^2} + \frac{y_p y_0}{i_y^2} = 0$	
27	Как должна пройти нулевая линия при внецентренном растяжении поперечного сечения, изображенного на рисунке? Растягивающая сила, приложена в точке А.	60
	1. 	
	2. 	
	3. 	
	4. 	

28	<p>Как пройдет нулевая линия при внецентренном растяжении, если растягивающая сила, лежит в точке А на оси y?</p> 	40
	1. Через центр тяжести сечения.	
	2. Под острым углом к оси z .	
	3. Параллельно оси y .	
	4. Параллельно оси z .	
29	<p>Для каких фигур при внецентренном растяжении (сжатии) удобно использовать условие прочности в виде:</p> $\sigma_{\max} = \left \frac{P}{A} + \frac{M_z}{W_z} + \frac{M_y}{W_y} \right \leq [\sigma]$	40
	1. Для фигуры произвольной формы.	
	2. Для фигуры, которая вписывается в треугольник.	
	3. Для фигуры с круглым поперечным сечением.	
	4. Для фигуры, которая вписывается в прямоугольник.	
30	<p>Две одинаковые по величине силы P приложены в точках А и В сечения, приведенного на рисунке. Как изменятся максимальные напряжения в сечении, если одну из этих сил убрать?</p> 	300
	1. Не изменятся.	
	2. Увеличатся в 2 раза.	
	3. Увеличатся в 4 раза.	
	4. Уменьшатся в 2 раза.	
	5. Уменьшатся в 4 раза.	
31	<p>Нормальное напряжение в точке А сжатого бруса равно 10МПа (растяжение), а напряжения в точках В равно нулю. Чему равно напряжение в точке С?</p> 	240

32	Что такое ядро сечений при внецентренном растяжении и сжатии?	30
	1. Зона решительных действий.	
	2. Зона вокруг точки приложения растягивающей или сжимающей силы.	
	3. Зона вокруг центра тяжести поперечного сечения стержня.	
	4. Зона вокруг точки, в которой действуют максимальные напряжения.	
33	Что означает принадлежность растягивающей или сжимающей силы ядру сечений при внецентренном растяжении и сжатии?	
	1. Равенство нулю напряжений в поперечном сечении.	
	2. Равенство знака напряжений в пределах всего поперечного сечения.	
	3. Отличие знаков напряжений в пределах поперечного сечения.	
	4. Обязательное равенство напряжений в сечении.	
34	Как ведет себя нулевая линия при внецентренном растяжении и сжатии, если сила находится в середине ядра сечения?	30
	1. Проходит через центр тяжести сечения.	
	2. Находиться вне сечения.	
	3. Пересекает сечение.	
	4. Касается сечения.	
35	Как ведет себя нулевая линия при внецентренном растяжении и сжатии, если точка приложения силы лежит на границе ядра сечения?	30
	1. Проходит через центр тяжести сечения.	
	2. Находиться вне сечения.	
	3. Пересекает сечение.	
	4. Касается сечения.	
36	Какой вид приобретает ядро сечения для поперечного сечения прямоугольной формы?	40
1.		
2.		

	3.		
	4.		
37	Какие внутренние силовые факторы возникают при изгибе с кручением?	30	
	1. Поперечная сила и изгибающий момент.		
	2. Крутящий момент и продольная сила.		
	3. Поперечная сила и продольная сила.		
	4. Крутящий момент и изгибающий момент.		
38	Какое напряженное состояние возникает при изгибе с кручением?	30	
	1. Плоское.		
	2. Объемное.		
	3. Линейное.		
39	Какой из элементов приведенной на рисунке конструкции испытывает деформацию изгиба с кручением?	90	
			
	1. Элемент конструкции ВС.		
	2. Элемент конструкции АВ.		
	3. Элемент конструкции CD.		
40	Какой метод при изгибе с кручением используют для создания расчетной схемы?	30	
	1. Метод моментных точек.		
	2. Метод независимости действия сил.		
	3. Метод сил.		
	4. Метод Мора-Симпсона.		
41	Какая из теорий прочности была использована при формулировке условия прочности при изгибе с кручением для валов?	30	
	$\sigma_{\text{экр}} = \frac{\sqrt{M_z^2 + M_y^2 + 0,75M_{\text{кр}}^2}}{W_z} \leq [\sigma]$		
	1. Теория наибольших касательных напряжений.		
	2. Теория наибольших линейных деформаций.		
	3. Энергетическая теория прочности.		

	4. Теория наибольших нормальных напряжений.	
42	<p>Какая из теорий прочности была использована при формулировке условия прочности при изгибе с кручением для валов?</p> $\sigma_{\text{екв}} = \frac{\sqrt{M_z^2 + M_y^2 + M_{\text{кр}}^2}}{W_z} \leq [\sigma]$	30
	1. Теория наибольших касательных напряжений.	
	2. Теория наибольших линейных деформаций.	
	3. Энергетическая теория прочности.	
	4. Теория прочности Мора.	
43	<p>С помощью какой из теорий прочности при изгибе с кручением валов определяется приведенный момент в виде</p> $M_{\text{пр}} = \frac{1-K}{2} \sqrt{M_z^2 + M_y^2} + \frac{1+K}{2} \sqrt{M_z^2 + M_y^2 + M_{\text{кр}}^2}$	40
	1. Теория наибольших касательных напряжений.	
	2. Теория наибольших линейных деформаций.	
	3. Энергетическая теория прочности.	
	4. Теория прочности Мора.	
44	<p>В сколько раз изменится наибольшее расчетное напряжение в стержне АВ круглого поперечного сечения диаметром $d = 5 \text{ см}$, если один из грузов снять? Использовать III теорию прочности.</p> 	300